

# ELEKTRODYNAMIK

Skriptum nach einer Vorlesung zur  
Theoretischen Physik B  
(Universität Karlsruhe SS 89)

gehalten von

JULIUS WESS

Bearbeitet von  
THOMAS STROHM

## Inhaltsverzeichnis

1. Die MAXWELL-Gleichungen . . . . .	1
2. Elektrostatik . . . . .	1
3. Randwertproblem zur POISSON-Gleichung . . . . .	5
4. Multipolentwicklung . . . . .	11
5. Energie . . . . .	15
6. Energie im äußeren Feld . . . . .	17
7. Kapazität . . . . .	18
8. Elektrodynamik . . . . .	20
9. Lösung der MAXWELL-Gleichungen . . . . .	22
10. Wellengleichung und Lösungen . . . . .	24
11. Energie und Impuls elektromagnetischer Wellen . . . . .	29
12. Der Tensorkalkül . . . . .	31
13. LORENTZ-Transformationen . . . . .	35
14. Elektrodynamik in kovarianter Form . . . . .	38
15. Kovarianter LAGRANGE-Formalismus . . . . .	43
16. Elektrostatik im Medium . . . . .	46
17. Dispersion . . . . .	49
18. Elektrodynamik im Medium . . . . .	52
19. Ebene Wellen an Grenzflächen: Die FRESNELSchen Formeln . . . . .	55
20. Lösung der Wellengleichung mittels FOURIER-Transformation . . . . .	58
21. Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen . . . . .	62

# 1. Die MAXWELL-Gleichungen

Die Behandlung der klassischen Elektrodynamik soll hier *deduktiv* erfolgen; d.h. als Grundlage dienen die 4 MAXWELLSchen Gleichungen, die die gesamte Elektrodynamik beinhalten. Absicht der Vorlesung ist es, Folgerungen aus diesen 4 Gleichungen zu ziehen.

Die 4 MAXWELL-Gleichungen bilden ein System von 4 partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung. Sie lauten

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\varrho, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\partial_t \mathbf{H}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \quad (4)$$

Dabei ist  $\varrho(x, y, z, t)$  die *Ladungsdichte*,  $\mathbf{E}(x, y, z, t)$  die *elektrische* und  $\mathbf{H}(x, y, z, t)$  die *magnetische Feldstärke*. Die *elektrische Stromdichte* wird mit  $\mathbf{j}(x, y, z, t)$  bezeichnet;  $c$  steht für die Lichtgeschwindigkeit.

An dieser Stelle noch Erläuterndes zu den Differentialoperatoren. Es sind  $\operatorname{div}$  und  $\operatorname{rot}$  Operatoren auf Vektorfeldern. Der Operator  $\operatorname{div}$  ist skalarwertig,  $\operatorname{rot}$  vektorwertig. Sei  $\mathbf{A}(x, y, z, t) = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3)$  ein (differenzierbares) Vektorfeld. Dann gilt unter Beachtung der EINSTEINSchen Summenkonvention (Summation über doppelt auftretende Indizes)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &\equiv \partial_i \mathbf{A}_i \\ (\operatorname{rot} \mathbf{A})_i &\equiv \varepsilon_{ijk} \partial_j \mathbf{A}_k, \end{aligned} \quad (5)$$

wobei  $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$  gelten soll. Das Symbol  $\varepsilon_{ijk}$  ist definiert durch totale Antisymmetrie bzgl. Vertauschung der Indizes sowie durch die Normierung  $\varepsilon_{123} := +1$ . Insgesamt also

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} +1 & \text{falls } (ijk) \text{ gerade Permutation von } (123), \\ -1 & \text{falls } (ijk) \text{ ungerade Permutation von } (123) \text{ und} \\ 0 & \text{falls mind. zwei Indizes übereinstimmen.} \end{cases} \quad (6)$$

## 2. Elektrostatik

Mit *Elektrostatik* bezeichnet man den Spezialfall der Elektrodynamik, bei dem alle Felder zeitunabhängig sind, und darüberhinaus die Felder  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{j}$  identisch verschwinden.

Die Gleichungen 1(3) und 1(4) fallen also weg und die rechte Seite von 1(2) wird 0. Dann haben wir die Gleichungen der Elektrostatik:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\varrho, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (2)$$

Wegen (2) ist nach den Satz von STOKES

$$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \, ds = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \, d\mathbf{F} = 0,$$

die Wegintegrale  $\int \mathbf{E} \, ds$  sind also wegunabhängig. Dies bedeutet, daß zu  $\mathbf{E}$  eine Stammfunktion  $\varphi$  existiert. Wir setzen also

$$\varphi(x, y, z) := - \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \mathbf{E} \, ds + \text{const}$$

und nennen die skalare Ortsfunktion  $\varphi(x, y, z)$  das *elektrostatische Potential*. Damit gilt

$$\mathbf{E} = - \operatorname{grad} \varphi. \quad (3)$$

Zusammenfassend bedeutet das folgenden Sachverhalt: Jedes aus beliebigem stetig differenzierbarem  $\varphi(x, y, z)$  mittels  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$  gewonnene  $\mathbf{E}$  ist Lösung von (2), denn es ist  $\text{rot grad} \equiv \mathbf{0}$ . Weiterhin existiert zu jedem  $\mathbf{E}$ , das Lösung von (2) ist, ein  $\varphi$ , sodaß  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ . Denn dann ist  $\mathbf{E}$  wirbelfrei und damit sind die Wegintegrale  $\int \mathbf{E} ds$  wegunabhängig.

Setzt man obige Lösung (3) von (2) in (1), so erhält man  $\text{div grad } \varphi = -4\pi\rho$ , oder mit dem LAPLACE-Operator  $\Delta$  ( $\Delta \equiv \text{div grad}$ ) die sog. POISSON-Gleichung

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho, \quad (4)$$

mit deren Lösung sich die Elektrostatik hauptsächlich beschäftigt. Im Vakuum, wo  $\rho$  identisch verschwindet, wird aus (4) die LAPLACE-Gleichung

$$\Delta \varphi = 0.$$

Es sei betont, daß diese Gleichung unendlich viele Lösungen hat — man nennt sie harmonische Funktionen oder Potentialfunktionen. Folglich ist die Lösung der POISSON-Gleichung bei weitem nicht eindeutig; vielmehr können wir bei fest vorgegebener Ladungsverteilung beliebig viele verschiedene Felder  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$  angeben. Man muß — um genau eine Lösung zu erhalten — noch *Randbedingungen* fordern; ein Beispiel wäre das Verschwinden des Potentials im Unendlichen. Diese Problematik soll im Kapitel über Randwertprobleme diskutiert werden.

Wir wollen nun die POISSON-Gleichung lösen. Dazu definieren wir zunächst die GREENSche Funktion  $G(\mathbf{x})$  des  $\Delta$ -Operators durch

$$\Delta_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (5)$$

Dabei bedeutet  $\delta(\mathbf{x})$  die DIRACsche  $\delta$ -Funktion im dreidimensionalen mit  $\delta(\mathbf{x}) \equiv \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ . Hat man die GREENSche Funktion, so kann die Lösung von (4) für eine beliebige Ladungsverteilung durch Integration gewonnen werden, denn sei  $\rho(\mathbf{x})$  eine beliebige, gegebene Ladungsverteilung. Dann löst

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^3} \rho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV' \quad (6)$$

die POISSON-Gleichung. Dies wollen wir nun beweisen. Es ist  $\Delta_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ , nach Multiplikation mit  $\rho(\mathbf{x}')$  und Integration über  $dV'$  haben wir also  $\int_{\mathbf{R}^3} \Delta_{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV' = -4\pi \int_{\mathbf{R}^3} \rho(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV' = -4\pi\rho(\mathbf{x})$ . Zieht man nun den LAPLACE-Operator vor das Integral, so sieht man die Behauptung.

Damit unser Satz aber überhaupt brauchbar wird, muß die GREENSche Funktion  $G(\mathbf{x})$  bekannt sein. Wir substituieren  $\mathbf{x} - \mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}$ , dann lautet unsere Aufgabe,

$$\Delta G(\mathbf{x}) = -4\pi\delta(\mathbf{x}) \quad (7)$$

zu lösen. Dies wollen wir auf zwei verschiedenen Wegen tun.

Mit dem COULOMB-Potential vor Augen machen wir den Ansatz

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|} = \frac{1}{r}.$$

Sei nun  $r := |\mathbf{x}| \neq 0$ . Dann ist  $\partial_x^2(1/|\mathbf{x}|) = \partial_x^2(-x/r^3) = (3x^2 - r^2)/r^5$ , insgesamt also

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|} = \frac{3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 3r^2}{r^5} = 0.$$

Somit erfüllt unser Ansatz die Gleichung (7) für alle  $r \neq 0$ . Außerdem soll für die  $\delta$ -Funktion  $\int \delta(\mathbf{x}) dV = 1$  gelten, zu überprüfen bleibt also die Gleichung  $\int \Delta G(\mathbf{x}) dV = -4\pi$ .

Sei also  $K_R$  die Kugel um  $(0, 0, 0)$  mit dem Radius  $R$ . Dann haben wir unter Berücksichtigung von  $d\mathbf{F} = \mathbf{n} dF$  die Gleichungskette  $\int_{K_R} \Delta \frac{1}{r} dV = \int_{K_R} \text{div grad } \frac{1}{r} dV = \int_{\partial K_R} \text{grad } \frac{1}{r} d\mathbf{F} = (*)$  und

weiter  $(*) = \int_{\partial K_R} \text{grad } \frac{1}{r} \frac{\mathbf{r}}{r} dF = - \int_{\partial K_R} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \frac{\mathbf{r}}{r} dF = -\frac{1}{R^2} \int_{\partial K_R} dF = -\frac{1}{R^2} 4\pi R^2 = -4\pi$ , womit alles gezeigt ist.

Eine allgemeinere Möglichkeit zur Gewinnung GREENScher Funktionen von Differentialgleichungen — wir werden sie noch öfters benutzen — ist die Methode der FOURIER-Transformation (FT). Mit

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3k \quad \text{und} \quad G(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tilde{G}(\mathbf{k}) d^3k,$$

wobei  $\tilde{G}(\mathbf{k})$  die FOURIER-Transformierte von  $G(\mathbf{x})$  ist, wird (7) zu

$$\Delta \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tilde{G}(\mathbf{k}) d^3k = -\frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3k,$$

also

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \Delta e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tilde{G}(\mathbf{k}) d^3k + \frac{1}{2\pi^2} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3k = 0$$

oder

$$\int (-\mathbf{k}^2 \tilde{G}(\mathbf{k}) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3k = 0.$$

Die Funktion  $-\mathbf{k}^2 \tilde{G}(\mathbf{k}) + \sqrt{2/\pi}$  ist Null, da sie FOURIER-Transformierte der Null ist. Damit haben wir

$$\tilde{G}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\mathbf{k}^2}. \quad (8)$$

Diese Gleichung ist äquivalent zur Gleichung (7), es ist die in den  $\mathbf{k}$ -Raum transformierte Gleichung (7). Durch die FT wurde also erreicht, daß aus einer Differentialgleichung eine algebraische Gleichung, die wir leicht lösen können, geworden ist. Rücktransformation liefert nun  $G(\mathbf{x})$ . Es ist

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tilde{G}(\mathbf{k}) d^3k \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{\mathbf{k}^2} d^3k \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{\mathbf{k}^2} d^3k. \end{aligned}$$

Auf solche Integrale stößt man oft bei dieser Methode. Zu deren Lösung lohnt es sich, den folgenden Trick zu merken: Bei festem  $\mathbf{x}$  wählt man ein kartesisches Koordinatensystem so, daß dessen z-Achse mit  $\mathbf{x}$  zusammenfällt. In diesem Koordinatensystem verschwinden also die x- und die y-Komponente von  $\mathbf{x}$ , was bei der Auswertung des Integrals erhebliche Erleichterung bedeutet. Das Skalarprodukt  $\mathbf{k}\mathbf{x}$  wird zu  $|\mathbf{k}||\mathbf{x}|\cos(\frac{\pi}{2} - \vartheta) = r|\mathbf{x}|\sin\vartheta$ , der Betrag der JACOBI-Determinante der Transformation ist  $r^2 \cos\vartheta$ . Wir erhalten also

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{\mathbf{k}^2} d^3k \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i|\mathbf{x}|r \sin\vartheta}}{r^2} r^2 \cos\vartheta d\varphi d\vartheta dr \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\vartheta e^{i|\mathbf{x}|r \sin\vartheta} d\vartheta dr \\ &= \frac{1}{i\pi|\mathbf{x}|} \int_0^\infty r^{-1} \left[ e^{i|\mathbf{x}|r \sin\vartheta} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} dr \\ &= \frac{1}{i\pi|\mathbf{x}|} \int_0^\infty \frac{e^{i|\mathbf{x}|r} - e^{-i|\mathbf{x}|r}}{r} dr \\ &= \frac{1}{\pi|\mathbf{x}|} \int_0^\infty \frac{2 \sin(|\mathbf{x}|r)}{|\mathbf{x}|r} d(|\mathbf{x}|r) \\ &= \frac{2}{\pi|\mathbf{x}|} \int_0^\infty \frac{\sin\xi}{\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Da das rechts stehende uneigentliche Integral den Wert  $\pi/2$  hat (es handelt sich um den Integralsinus), wird

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|}.$$

Insgesamt erhält man mit (6) also eine spezielle Lösung der POISSON-Gleichung zu

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{\varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV'. \quad (9)$$

Diese spezielle Lösung besitzt folgende Eigenschaft: Ist die ganze felderzeugende Ladung innerhalb einer Kugel mit endlichem Radius  $R$ , d.h. gilt  $\varrho(\mathbf{x}') = 0 \quad \forall |\mathbf{x}'| > R$ , so ist  $\varphi(\mathbf{x}) \approx Q/|\mathbf{x}|$  für alle  $\mathbf{x}$  mit  $|\mathbf{x}| \gg R$  und wegen  $Q/|\mathbf{x}| \rightarrow 0$  für  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  verschwindet  $\varphi$  im Unendlichen, was durch folgende Betrachtung klar wird: Es ist  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = |\mathbf{x}| \sqrt{1 - 2\mathbf{x}\mathbf{x}'/x^2 + x'^2/x^2} = |\mathbf{x}| \sqrt{1 - 2\mathbf{x}\mathbf{x}'/x^2 + x'^2/x^2} \approx |\mathbf{x}|$  für  $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$ , damit ist also  $\varphi(\mathbf{x}) \approx Q/\mathbf{x}$ . Dies ist der angesprochene Randwert.

Als Beispiel für die Benutzung von (9) wollen wir den Spezialfall

$$\varrho(\mathbf{x}) = \varrho(|\mathbf{x}|) \equiv \varrho(r), \quad (10)$$

eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung betrachten. (In der "Praxis" wird man hierfür natürlich nicht den im folgenden vorgestellten Lösungsweg wählen; vielmehr wird man direkt von Gleichung (1) ausgehen und unter Berücksichtigung der Symmetrien des Systemes sehr schnell zu einer Lösung gelangen.)

Wegen (9) haben wir also  $\varphi(\mathbf{x}) = \int (\varrho(|\mathbf{x}'|)/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) d^3x'$  zu berechnen. Dazu wählen wir bei fest gewähltem  $\mathbf{x}$  ein kartesisches Koordinatensystem, sodaß  $x_1 = x_2 = 0$  und  $x_3 = |\mathbf{x}|$ . Dann wird

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |\mathbf{x}| \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \begin{pmatrix} -r' \cos \vartheta' \cos \varphi' \\ -r' \cos \vartheta' \sin \varphi' \\ r - r' \sin \vartheta' \end{pmatrix} \right|^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\pi/2 - \vartheta'),$$

also

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{\varrho(r') r'^2 \cos \vartheta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \sin \vartheta'}} d\varphi' d\vartheta' dr' \\ &= 2\pi \int_0^\infty \varrho(r') r'^2 \left[ \frac{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \sin \vartheta'}}{rr'} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} dr' \\ &= -\frac{2\pi}{r} \int_0^\infty \varrho(r') r' (|r - r'| - (r + r')) dr', \end{aligned}$$

denn  $\left[ \frac{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \sin \vartheta'}}{rr'} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'} - \sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr'}}{rr'} = \frac{\sqrt{(r - r')^2} - \sqrt{(r + r')^2}}{rr'} = \frac{|r - r'| - (r + r')}{rr'}$ . Ist  $r' < r$ , so ist  $|r - r'| - (r + r') = -2r'$ , im Falle  $r' > r$  haben wir  $|r - r'| - (r + r') = -(r - r') - (r + r') = -2r$ , insgesamt ist also

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= -\frac{2\pi}{r} \left( -2 \int_0^r \varrho(r') r'^2 dr' - 2r \int_r^\infty r' \varrho(r') dr' \right) \\ &= r^{-1} \int_0^r 4\pi r'^2 \varrho(r') dr' + 4\pi \int_r^\infty r' \varrho(r') dr'. \end{aligned}$$

Denken wir uns eine Kugel mit Radius  $r$  um den Ursprung unseres Koordinatensystems, so ist die Gesamtladung innerhalb dieser Kugel genau gleich dem Integral im ersten Summanden. Wir wollen dafür  $Q_r$  schreiben und uns vor Augen halten, daß  $Q_r$  eine Funktion von  $r$  ist. Damit haben wir

$$\varphi(r) = \frac{Q_r}{r} + 4\pi \int_r^\infty r' \varrho(r') dr'. \quad (11)$$

Zur Verdeutlichung soll eine Kugel  $K_R$  mit Radius  $R$  und  $\varrho(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \notin K_R$  betrachtet werden. Dann ist  $Q_r = Q_R = \text{const}$ , falls  $r \geq R$ . In diesem Falle verschwindet das Integral im 2. Summanden und es ergibt sich

$$\varphi(r) = \frac{Q_R}{r}. \quad (r \geq R)$$

In  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  kommt das Integral in (11) auch im Falle  $r < R$  nicht mehr vor. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \varphi(r) = -\frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{r} \varphi'(r) \\ &= -\frac{\mathbf{r}}{r} \left( -\frac{1}{r^2} Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} Q_r - 4\pi \varrho(r) r \right). \end{aligned}$$

Aus  $Q_r = 4\pi \int_0^r \varrho(r') r'^2 dr'$  folgt  $\frac{\partial}{\partial r} Q_r = 4\pi r^2 \varrho(r)$  und schließlich

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = Q_r \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (12)$$

Zur Illustration soll folgendes Beispiel dienen: Gegeben sei eine homogen geladene Kugel  $K_R$ , d.h. es sei

$$\varrho(\mathbf{x}) = \begin{cases} \varrho_0 = Q/(\frac{4}{3}\pi R^3), & \text{falls } \mathbf{x} \in K_R; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann erhalten wir

$$|\mathbf{E}|(r) = \begin{cases} -(4/3)\pi \varrho_0 r^3 / r^2 = (Q/R^3)r & \text{falls } \mathbf{x} \in K_R; \\ Q_r / r^2 = Q/r^2, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Vom Ursprung aus wächst die Feldstärke also von 0 linear auf den Wert  $Q/R^2$  auf dem Rand der Kugel. Von dort fällt sie  $\propto r^{-2}$  auf 0 im Unendlichen ab.

### 3. Randwertproblem zur POISSON-Gleichung

Wie wir im letzten Kapitel gesehen haben, versetzt uns Gleichung 2(9) in die Lage, bei gegebener Ladungsverteilung das elektrostatische Potential und damit das elektrische Feld zu berechnen. Einerseits aber ist die Lösung von  $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi \varrho$ ;  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  nicht eindeutig bestimmt, was jedoch sein muß, da  $\mathbf{E}$  eine physikalisch meßbare Größe ist. Andererseits wird uns die Wirklichkeit oft vor eine Aufgabe stellen, die mit 2(9) nicht lösbar ist: Man denke sich eine Blechdose, darin eine Punktladung  $q$ . Außerhalb seien keine Ladungen. Offensichtlich ist das  $1/r$ -Potential keine Lösung, denn die Dose erzwingt durch ihre leitende Oberfläche auf ihr überall gleiches Potential. Dies geschieht durch sog. Influenz. Diese Betrachtungen führen auf den in diesem Kapitel zu behandelnden Themenkomplex.

Der Gegenstand unserer Überlegung sind also die Lösungen der POISSON-Gleichung

$$\Delta \varphi(\mathbf{x}) = -4\pi \varrho(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Wir fragen uns, ob die Lösung dieser Gleichung eindeutig bestimmt ist, und, falls nicht, wollen wir untersuchen, was für Randbedingungen nötig sind, diese Eindeutigkeit zu garantieren.

Seien  $\varphi_1, \varphi_2$  Lösungen von (1). Dann gilt

$$\Delta(\varphi_1 - \varphi_2) = \Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_2 \stackrel{(1)}{=} 0,$$

was nach Einführung von  $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$  zur LAPLACE-Gleichung

$$\Delta \psi = 0 \quad (2)$$

wird. Offenbar ist die Lösung von (1) eindeutig, falls  $\psi \equiv 0$ , d.h.  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$  gilt. Wir haben also folgende Aussage: Ist  $\varphi(\mathbf{x})$  eine Lösung von (1) und  $\psi(\mathbf{x})$  eine beliebige Lösung der LAPLACE-Gleichung (2), so ist auch  $\varphi(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x})$  eine Lösung der POISSON-Gleichung (1).

Einen ähnlichen Fall haben wir bei der Lösung von  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ , falls  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  fest vorgegeben ist. Ist dann nämlich  $\varphi_0$  eine Lösung dieser Gleichung, so auch  $\varphi_0 + \text{const}$ . Die Transformation  $\varphi \mapsto \varphi + \text{const}$  läßt also die Gleichung  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$  invariant. Hier stellt sich jedoch nicht das obige Problem mit der benötigten Eindeutigkeit, denn ein absolutes Potential ist nicht meßbar, sondern nur Differenzen davon.

Wir erinnern zunächst an die 2 GREENSchen Formeln. Seien  $\Phi, \Psi$  skalare Felder, dann lautet die 1. GREENsche Formel

$$\int_V (\Phi \Delta \Psi + \text{grad } \Phi \text{ grad } \Psi) dV = \int_{\partial V} \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} dF, \quad (3)$$

wobei  $\frac{\partial \Psi}{\partial n} := \mathbf{n} \text{ grad } \Psi$  die Ableitung von  $\Psi$  nach der äußeren Normalen ist. Man erhält dieses Theorem leicht aus dem GAUSSschen Integralsatz, wenn man diesen auf das Vektorfeld  $\Phi \text{ grad } \Psi$  anwendet. Vertauscht man in (3)  $\Phi$  und  $\Psi$  und subtrahiert die entstehende Identität von (3), so erhält man die 2. GREENsche Formel

$$\int_V (\Phi \Delta \Psi - \Psi \Delta \Phi) dV = \int_{\partial V} \left( \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dF. \quad (4)$$

Mit diesen Sätzen können wir unser Problem mit den Randbedingungen in den Griff bekommen. Wir benutzen (3), setzen  $\Phi \equiv \Psi$  sowie  $\Psi \equiv \psi = \varphi_1 - \varphi_2$  und erhalten

$$\int_V (\psi \Delta \psi + (\text{grad } \psi)^2) d^3 x = \int_{\partial V} \psi \mathbf{n} \text{ grad } \psi dF.$$

Benutzen wir die LAPLACE-Gleichung (2), so haben wir

$$\int_V (\text{grad } \psi)^2 d^3 x = \int_{\partial V} \psi \mathbf{n} \text{ grad } \psi dF. \quad (5)$$

Verschwindet das Oberflächenintegral in (5), so folgt daraus  $\text{grad } \psi \equiv 0$  — da  $V$  beliebig ist — was wiederum  $\psi = \text{const}$  bedeutet. Damit ist aber  $\varphi_1 = \varphi_2 + \text{const}$ ; die Lösung von (1) wäre also bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Um das Oberflächenintegral verschwinden zu lassen, gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder durch  $\psi \equiv 0$  oder mit  $\mathbf{n} \text{ grad } \psi \equiv 0$ , jeweils auf  $\partial V$ .

Als Randbedingung an die Lösung  $\varphi(\mathbf{x})$  von (1) geben wir nun  $\varphi|_{\partial V}$  vor, was die Randbedingung  $\psi|_{\partial V} = 0$  an die Lösung  $\psi(\mathbf{x})$  von (2) impliziert. Damit verschwindet die rechte Seite von (5), d.h. es folgt  $\int_V (\text{grad } \psi)^2 d^3 x = 0$ . Somit ist notwendig  $\text{grad } \psi = 0$  und also  $\psi = \text{const}$  auf  $V$ . Ist zusätzlich  $\psi$  stetig auf  $\partial V$ , haben wir  $\psi \equiv 0$  auf  $V$ , also  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$  auf  $V$ .

Zusammenfassend läßt sich folgendes sagen: Ist (1) zu lösen, und als Randbedingung  $\varphi(\mathbf{x})$  auf  $\partial V$  fest vorgegeben, so haben wir in  $V$  eine eindeutige Lösung. Ein auf einer Hülle  $\partial V$  fest vorgegebenes  $\varphi$  nennt man eine DIRICHLETSche Randbedingung.

Eine NEUMANNsche Randbedingung ist die Vorgabe von  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \equiv \mathbf{n} \text{ grad } \varphi$  auf  $\partial V$ . Damit wird dann  $\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 0$  auf  $\partial V$ .

Wieder verschwindet die rechte Seite von (5), wir verwenden denselben Schluß wie oben. Damit kommen wir zu folgender Aussage: Ist (1) zu lösen und  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \mathbf{n} \text{ grad } \varphi$  auf  $\partial V$  fest vorgegeben, so ist die Lösung in  $V$  bis auf eine additive Konstante eindeutig.

Sei nun  $\partial V$  zerlegt in  $(\partial V)_1$  und  $(\partial V)_2$ , d.h.  $\partial V = (\partial V)_1 \cup (\partial V)_2$  sowie  $(\partial V)_1 \cap (\partial V)_2 = \emptyset$ . Weiter existiere auf  $(\partial V)_1$  eine Randbedingung von Typ DIRICHLET sowie auf  $(\partial V)_2$  eine solche vom Typ NEUMANN. Auch in diesem Falle ist offenbar die rechte Seite von (5) identisch 0, also haben wir auch hier eine eindeutige Lösung.

Jetzt wollen wir versuchen Randbedingungen durch Festlegung von  $\varphi|_{\partial V}$  und  $\frac{\partial}{\partial n} \varphi|_{\partial V}$  vorzugeben. Man nennt dies eine CAUCHYSche Randbedingung. Daß dies eine Überbestimmung des

Problems bedeutet — und damit auf eine Inkonsistenz führt — sieht man leicht, da die Vorgabe von  $\varphi|_{\partial V}$  die Funktion  $\varphi$  eindeutig bestimmt. Aus dieser läßt sich wiederum  $\frac{\partial}{\partial n}\varphi|_{\partial V}$  berechnen, was im allgemeinen aber nicht mit der 2. Vorgabe übereinstimmen wird.

Im vorigen Kapitel haben wir eine Eigenschaft der GREENSchen Funktion festgestellt: Sie erfüllt die Randbedingung  $\varphi|_{\partial K_R} \rightarrow 0$  für  $R \rightarrow \infty$ . (Wir wollen für diesen Typ von Randbedingung auch die Bezeichnungen  $\varphi|_{\partial K_\infty} = 0$  und  $\varphi(\infty) = 0$  benutzen.) Es stellt sich also die Frage, ob wir GREENSche Funktionen  $G_D$  und  $G_N$  finden können, die es uns gestatten, Potentialfunktionen zu berechnen, die nicht — wie im Falle des letzten Kapitels — automatisch die Randbedingung  $\varphi(\infty) = 0$  erfüllen, sondern einer beliebigen, jedoch fest vorgegebenen DIRICHLET- bzw. NEUMANN-Randbedingung Genüge leisten.

Dazu ist nochmal zu betonen, daß  $G(\mathbf{x})$  nicht eindeutig ist. Sei nämlich  $\Delta F(\mathbf{x}) = 0$ , dann erfüllt auch  $G(\mathbf{x}) + F(\mathbf{x})$  die Anforderungen an eine GREENSche Funktion. Dies deutet darauf hin, daß  $F$  die Funktion  $G(\mathbf{x})$  an bestimmte Randbedingungen anpassen kann.

Bisher hatten wir bei der GREENSchen Funktion nur eine Abhängigkeit von  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ . Dies lag daran, daß die rechte Seite der definierenden Differentialgleichung 2(5) nur von  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$  abhängt und dies zusätzlich auch für die automatisch erfüllte Randbedingung  $\varphi(\infty) = 0$  gilt. Liegt die Fläche, auf der die Randbedingung vorgegeben ist jedoch — zumindest teilweise — im Endlichen, so ist diese Verschiebungssymmetrie nicht mehr vorhanden; mit anderen Worten: Die Gestalt der Potentialfunktion einer Punktladung hängt dann vom Ort der Punktladung ab. Wir haben also im weiteren eine Abhängigkeit von  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x}'$  der GREENSchen Funktion. Diese sei jetzt definiert durch

$$\Delta' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (6)$$

Um diese Funktion zu finden, benutzen wir die 2. GREENSche Formel, ersetzen darin  $\mathbf{x}$  durch  $\mathbf{x}'$  (damit auch  $\Delta$  durch  $\Delta_{\mathbf{x}'}$  =:  $\Delta'$  und ebenso grad durch  $\text{grad}_{\mathbf{x}'}$  =:  $\text{grad}'$ ),  $\Phi$  durch  $\varphi(\mathbf{x}')$ ,  $\Psi$  durch  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  ( $\mathbf{x}$  fest) und erhalten die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_V (\varphi(\mathbf{x}') \Delta' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Delta' \varphi(\mathbf{x}')) d^3x' \\ = \int_{\partial V} (\varphi(\mathbf{x}') \mathbf{n}' \text{grad}' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{n}' \text{grad}' \varphi(\mathbf{x}')) dF'. \end{aligned}$$

Die linke Seite wird unter Berücksichtigung von (6) und  $\Delta' \varphi(\mathbf{x}') = -4\pi\rho(\mathbf{x}')$  im Falle  $\mathbf{x} \in V$  zu

$$-4\pi \int_V (\varphi(\mathbf{x}')\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}')) d^3x' = -4\pi\varphi(\mathbf{x}) + 4\pi \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}') d^3x',$$

im Falle  $\mathbf{x} \notin V$  verschwindet der erste Summand der rechten Seite. Insgesamt haben wir somit

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}') d^3x' + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \underbrace{(G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{n}' \text{grad}' \varphi(\mathbf{x}'))}_{(a)} - \underbrace{\varphi(\mathbf{x}') \mathbf{n}' \text{grad}' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}_{(d)} dF'. \quad (7)$$

Wie schon bemerkt gilt das nur für  $\mathbf{x} \in V$ , sonst verschwindet die linke Seite von (7).

Wir betrachten zunächst den DIRICHLET-Fall. Es ist  $\varphi|_{\partial V}$  vorgegeben. Wollen wir mit (7) also  $\varphi$  berechnen, so muß (a) verschwinden, da uns  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\partial V}$  nicht bekannt ist. Wir fordern also insgesamt für die DIRICHLET-GREENSche Funktion

$$\begin{aligned} \Delta' G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \text{und } G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= 0 \quad \text{für } \mathbf{x}' \in \partial V. \end{aligned} \quad (8)$$

Haben wir diese Funktion, so können wir für jede beliebige Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{x})$  das Potential mittels der Formel

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_V G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \varphi(\mathbf{x}') \mathbf{n}' \text{grad}' G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dF' \quad (9)$$

berechnen. Falls  $\varphi|_{\partial V} \equiv 0$  gefordert ist, fällt der 2. Summand weg.

Zur DIRICHLET-GREENSchen Funktion nun einige Bemerkungen. Zunächst halten wir fest, daß  $G_D$  nur von der Geometrie von  $\partial V$ , nicht jedoch von der Ladungsverteilung oder den Randbedingungen abhängt. Darüberhinaus ist die DIRICHLET-GREENSche Funktion in ihren Argumenten symmetrisch, d.h. es gilt  $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G_D(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ . Dies sieht man leicht ein, wenn man in der 2. GREENSchen Formel (4)  $\Phi = G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  und  $\Psi = G_D(\mathbf{x}', \mathbf{y})$  setzt, und  $\mathbf{y}$  als Integrationsvariable auffaßt. Zur Bestimmung von  $G_D$  sei folgendes gesagt: Kann man die Randwertaufgabe für die Ladungsverteilung  $\varrho(\mathbf{x}) = q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a})$  und den Randwert  $\varphi|_{\partial V} \equiv 0$  lösen, so ist  $G_D$  bekannt, denn es folgt mit  $\varphi|_{\partial V} \equiv 0$  aus (9) die Formel  $\varphi(\mathbf{x}) = \int G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')q\delta(\mathbf{x}, \mathbf{a})d^3x' = qG_D(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ ;  $G_D$  ist also bis auf den Faktor  $q$  identisch mit  $\varphi(\mathbf{x})$ .

Nun zum NEUMANN-Fall:  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{\partial V}$  ist Randwert; wegen (7) und der Tatsache, daß  $\varphi|_{\partial V}$  unbekannt ist, fordern wir zunächst das naheliegende  $\mathbf{n}' \text{grad}' G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0$ . Dies liefert jedoch einen Widerspruch. Wir wenden auf  $\Delta' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  den GAUSSSchen Satz an und erhalten  $\int_V \text{div}' \text{grad}' G d^3x' = \int_{\partial V} \text{grad}' G d\mathbf{F}' = \int_{\partial V} \frac{\partial G}{\partial n'} dF' \stackrel{!}{=} \int_V (-4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) d^3x' = -4\pi$ , was unser Ansatz offenbar nicht zu leisten vermag. Das nächstliegende ist  $\frac{\partial G}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{|\partial V|}$ , wobei  $|\partial V|$  den Flächeninhalt von  $\partial V$  darstellen soll. Dies steht in Einklang mit unserer obigen Rechnung. Insgesamt fordern wir also für die NEUMANN-GREENSche Funktion  $G_N$ :

$$\begin{aligned} \Delta' G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \text{und} \quad \mathbf{n}' \text{grad}' G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= -\frac{4\pi}{|\partial V|}. \end{aligned} \quad (10)$$

Damit wird (7) zu

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_V G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\varrho(\mathbf{x}')d^3x' + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial\varphi}{\partial n'}(\mathbf{x}') dF' + \frac{1}{|\partial V|} \int_{\partial V} \varphi(\mathbf{x}') dF', \quad (11)$$

denn

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \frac{\partial G_N}{\partial n'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\varphi(\mathbf{x}') dF = \frac{1}{|\partial V|} \int \varphi(\mathbf{x}') dF';$$

dies stellt das auf  $\partial V$  gemittelte Potential dar. Offenbar ist das aber ein konstanter Wert, den wir weglassen können, da das Potential im NEUMANN-Fall sowieso nur bis auf eine additive Konstante eindeutig ist.

Als Beispiel betrachten wir eine unendlich ausgedehnte dünne, ebene und leitende Platte, die in der  $x$ - $y$ -Ebene liegen soll (Abb. 3.1). Diese zerlegt den  $\mathbf{R}^3$  in die Räume  $V_>$  mit  $z > 0$ ,  $V_<$  mit  $z < 0$  und die Platte  $F : z = 0$ . Diese Platte sei geerdet, es gilt also  $\varphi|_F = 0$ . In  $V_<$  befinden sich keine Ladungen,  $\varrho|_{V_<} = 0$ , also auch  $\Delta\varphi = 0$  auf  $V_<$ . Soll  $\varphi(\infty) = 0$  sein, so haben wir die Randbedingung  $\varphi|_{\partial V_<} = 0$ , damit ist  $\varphi \equiv 0$  in  $V_<$ . In  $V_>$  sei am Ort  $\mathbf{a} = (0, 0, a)$  eine Punktladung  $q$ , es gilt also

$$\Delta\varphi(\mathbf{x}) = -4\pi q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}). \quad (12)$$

Gesucht ist  $\varphi|_{V_>}$ . Es liegt die DIRICHLET-Randbedingung

$$\varphi|_{\partial V_>} = 0 \quad (13)$$

vor. Nach unseren Überlegungen zu Randwertproblemen ist die Lösung von (12), die (13) genügt, eindeutig bestimmt. Können wir also heuristisch zu einem  $\varphi$  gelangen, das (12) und (13) befriedigt, so ist dies die gesuchte Lösung.

Denkt man sich die Platte weg, plaziert dafür aber in  $-\mathbf{a}$  eine weitere Ladung  $-q$ , so erhält man das Potential

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} - \frac{q}{|\mathbf{x} + \mathbf{a}|}. \quad (14)$$

Offensichtlich ist  $\tilde{\varphi}|_F = 0$  und  $\tilde{\varphi}(\infty) = 0$ . (14) ist also die gesuchte Lösung von (12), (13). Wegen  $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = qG_D(\mathbf{x}, \mathbf{a})$  ist mit  $\mathbf{x}_S := S_z\mathbf{x} - S_z$  ist die Spiegelung an der  $x$ - $y$ -Ebene —

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_S|}$$

die GREENSche Funktion unseres Problems.

Man sieht leicht, daß  $\Delta' G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  auf  $V_{>}$ , aber auch  $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0$  falls  $\mathbf{x}' \in \partial V_{>}$ . Außerdem fällt auch die Darstellung  $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  mit  $\Delta' F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \Delta' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_s|} = 0$  sofort ins Auge. Mit der jetzt vorliegenden GREENSchen Funktion können wir  $\varphi(\mathbf{x})$  für beliebige  $\varrho(\mathbf{x})$  (mit  $\varrho|_{\mathbf{R} \setminus V_{>}} \equiv 0$ ) mit einer Integralformel angeben.

An dieser Stelle kann man nun den Begriff der Oberflächenladung einführen. Sei eine Fläche gegeben, auf der Ladungen sitzen. Dann definiert man durch

$$\int_V \varrho dV = \int_{F=V \cap O} \sigma dF$$

(siehe Abb. 3.2) die *Oberflächenladungsdichte*  $\sigma$ . Diese können wir in Beziehung mit der zur Oberfläche senkrechten Komponente  $\mathbf{E}_{\perp}$  des elektrischen Feldes setzen. Man betrachte das Integrationsgebiet in Abb. 3.3. Es ist einerseits

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{V_{\delta}} \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial V_{\delta}} \mathbf{E} d\mathbf{F} = (\mathbf{E}_{\perp}^{(2)} - \mathbf{E}_{\perp}^{(1)}) \cdot F,$$

andererseits

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{V_{\delta}} \operatorname{div} \mathbf{E} dV = 4\pi \lim_{\delta \rightarrow 0} \int \varrho dV = 4\pi \int_F \sigma dF = 4\pi\sigma F,$$

falls  $F$  klein genug ist. Damit ist

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E}_{\perp}^{(2)} - \mathbf{E}_{\perp}^{(1)}). \quad (15)$$

Auf unser Problem angewandt, ist  $\mathbf{E}_{\perp}^{(1)} = 0$  wegen  $\varphi|_{V_{<}} \equiv 0$  und damit  $\sigma(x, y) = \frac{1}{4\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \mathbf{E}_{\perp}^{(2)}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \partial_z \varphi(x, y, z)$ . Aus (14) folgt

$$-\partial_z \varphi(z) = q \left( \frac{z - a}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^3} - \frac{z + a}{|\mathbf{x} + \mathbf{a}|^3} \right),$$

also

$$\sigma(x, y) = -\frac{q}{4\pi} \frac{2a}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}^3}.$$

Die Gesamtladung auf der Platte ist

$$\begin{aligned} \int \sigma(x, y) dx dy &= -\frac{qa}{2\pi} \int \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}^3} = -\frac{qa}{2\pi} \int \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}^3} dr d\varphi \\ &= -qa \left[ -\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right]_0^{\infty} = -qa/a = -q. \end{aligned}$$

Die Erscheinung, daß eine Ladung auf der Oberfläche eines benachbarten Leiters Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens hervorruft, nennt man *Influenz*.

Als weiteres Beispiel stehe die geerdete, leitende Kugel in Abb. 3.4. Es sei außerhalb der Kugel — bei  $\mathbf{a} = (0, 0, a)$  — eine Ladung  $+q$  angebracht. Offensichtlich ist  $V = \mathbf{R}^3 \setminus K_R$  und  $\partial V = \partial K_R \cup \partial K_{\infty}$ . Wieder versuchen wir, eine Bildladung  $q'$  geschickt zu plazieren, sodaß — ohne die Kugel — automatisch  $\varphi|_{\partial K_R} = 0$  ist. Aus Symmetriegründen hat  $q'$  auf der  $z$ -Achse zu liegen, es ist also  $\mathbf{a}' = (a'/a)\mathbf{a}$ . Sind  $r$  bzw.  $s$  die Abstände der Ladungen zu einem beliebigen Punkt auf  $\partial K_R$ , so muß  $\varphi|_{\partial K_R} = q/r + q'/s = 0$  sein. Damit wird  $-q' = (s/r)q$ , was bedeutet, daß  $s/r$  für alle Punkte auf  $\partial K_R$  einen festen Wert haben muß. Am Ort  $B$  ist  $s = R - a'$ ,  $r = a - R$ ; am Ort  $A$  gilt  $s = R + a'$ ,  $r = R + a$ . Wir fordern also  $(R - a')(R + a) = (R + a')(a - R)$  oder  $R^2 = aa'$ . Überzeugt man sich noch, daß  $s/r$  mit  $aa' = R^2$  wirklich für alle Punkte auf  $\partial K_R$  einen festen Wert hat, so ist endlich

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} - \frac{(R/a)q}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}'|} \\ &= q \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} - \frac{1}{\left| \frac{a}{R}\mathbf{x} - \frac{R}{a}\mathbf{a} \right|} \right). \end{aligned}$$

Die Bedingung  $\varphi|_{\partial K_R} = 0$  ist damit erfüllt, denn mit  $\mathbf{x}^2 = R^2$  ist  $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a}\mathbf{x}}$  und  $|\frac{a}{R}\mathbf{x} - \frac{R}{a}\mathbf{a}| = \sqrt{\frac{a^2}{R^2}\mathbf{x}^2 + \frac{R^2}{a^2}\mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a}\mathbf{x}} = \sqrt{R^2 + a^2 - 2\mathbf{a}\mathbf{x}}$ . Wegen obigem Ausdruck für das Potential lautet die GREENSche Funktion der Kugel

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{\left| \frac{r'}{R}\mathbf{x} - \frac{R}{r'}\mathbf{x}' \right|} \right).$$

Ist  $\varphi|_{\partial K_R} \neq 0$ , so berechnet sich das Potential nach (9)

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_V G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \varrho(\mathbf{x}') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial K_R} \varphi(\mathbf{x}') \mathbf{n}' \operatorname{grad}' G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dF';$$

dabei ist  $\mathbf{n}'$  die bezüglich  $V$  äußere Normale auf  $\partial K_R$  — sie zeigt also ins Innere der Kugel. Es gilt  $\mathbf{n}' = -(\mathbf{x}'/|\mathbf{x}'|)$ . Mit  $r = |\mathbf{x}|$  und  $r' = |\mathbf{x}'|$  wird

$$\begin{aligned} \mathbf{n}' \operatorname{grad}' G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= -\frac{\mathbf{x}'}{r'} \frac{\partial r'}{\partial \mathbf{x}'} \frac{\partial}{\partial r'} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{\mathbf{x}'}{r'} \frac{\mathbf{x}'}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \\ &= -\frac{\partial}{\partial r'} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \end{aligned}$$

Wegen

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2r'r \cos \vartheta'}, \quad \left| \frac{r'}{R}\mathbf{x} - \frac{R}{r'}\mathbf{x}' \right| = \sqrt{\frac{r'^2}{R^2}r^2 + R^2 - 2r'r \cos \vartheta'}, \quad \vartheta' = \angle(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$$

ist

$$-\frac{\partial}{\partial r'} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{r' - r \cos \vartheta'}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \vartheta'}^3} - \frac{(r^2/R^2)r' - r \cos \vartheta'}{\sqrt{(r'^2/R^2)r^2 + R^2 - 2r'r \cos \vartheta'}^3}.$$

Für Punkte  $\mathbf{x}'$  auf  $\partial K_R$  gilt  $|\mathbf{x}'| \equiv r' = R$ . Damit wird

$$-\frac{\partial}{\partial r'} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Big|_{r'=R} = \frac{R - r^2/R}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \vartheta'}^3}.$$

Der 2. Summand in (9) lautet dann

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{\partial K_R} \varphi(\mathbf{x}') \mathbf{n}' \operatorname{grad}' G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dF' = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial K_R} \varphi(\mathbf{x}') \frac{R(1 - r^2/R^2)}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \vartheta'}^3} dF' = (*).$$

Sei nun  $\varphi(\mathbf{x}')|_{\partial K_r} = \varphi_0$ . Weiterrechnen ergibt dann

$$\begin{aligned} (*) &= -\frac{\varphi_0}{4\pi} \cdot 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{R(1 - r^2/R^2)}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \vartheta'}^3} R^2 \cos(\pi/2 - \vartheta') d\vartheta' \\ &= -\frac{\varphi_0}{2} R \int_{-1}^1 \frac{R^2 - r^2}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rrt}^3} dt \\ &= -\frac{\varphi_0}{2} R \left| \frac{R^2 - r^2}{Rr} \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rrt}} \right|_{-1}^1 \\ &= -\frac{\varphi_0}{2} \frac{R^2 - r^2}{r} \left( \frac{1}{|R - r|} - \frac{1}{|R + r|} \right) \\ &= -\varphi_0 \frac{R}{r}, \quad \text{falls } R < r. \end{aligned}$$

Das Potential berechnet sich somit nach

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \left( \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} - \frac{1}{|(r/R)\mathbf{x}' - (R/r)\mathbf{x}|} \right) \varrho(\mathbf{x}') d^3x' - \frac{R}{|\mathbf{x}|} \varphi_0.$$

## 4. Multipolentwicklung

Wir denken uns in diesem Kapitel eine Ladungsverteilung  $\varrho(\mathbf{x})$ , die außerhalb einer Kugel  $K_R$  mit Radius  $R$  um den Koordinatennullpunkt verschwindet. Das bedeutet, daß sich nur innerhalb dieser Kugel Ladung befindet. Es gilt  $\varrho(\mathbf{x}') = 0$ , falls  $|\mathbf{x}'| > R$ . Als Potential erhält man

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{K_R} \frac{\varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x'. \quad (1)$$

Ist nun  $|\mathbf{x}'| \ll |\mathbf{x}|$  so liegt es nahe, die GREENSche Funktion zu entwickeln. Die erhaltene Reihe in (1) eingesetzt könnten wir also das Potential  $\varphi(\mathbf{x})$  als eine Reihe

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi^{(0)}(\mathbf{x}) + \varphi^{(1)}(\mathbf{x}) + \varphi^{(2)}(\mathbf{x}) + \dots \quad (2)$$

darstellen.

Zur Entwicklung der GREENSchen Funktion stehen uns zwei Möglichkeiten offen.

Sei  $x = |\mathbf{x}|$  und  $x' = |\mathbf{x}'|$ . Zunächst entwickeln wir nach  $x'/x$ . Mit  $\mathbf{xx}' = xx' \cos \vartheta$  ist

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{x'}{x} \cos \vartheta + \frac{x'^2}{x^2}}},$$

was sich wegen

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2hz + h^2}} = \sum_l h^l P_l(z)$$

— dabei sind die  $P_l(z)$  die LEGENDRESchen Polynome — in der Form

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{x} \sum_l \left(\frac{x'}{x}\right)^l P_l(\cos \vartheta)$$

schreiben läßt. Damit haben wir wegen (1) die Entwicklung

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_l \frac{P_l(\cos \vartheta)}{x^{l+1}} \int_{K_R} \varrho(\mathbf{x}') x'^l d^3 x' \equiv \sum_l \varphi^{(l)}(\mathbf{x})$$

für das Potential.

An dieser Stelle wollen wir jedoch einen anderen Weg beschreiben. Mit  $f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  in die TAYLOR-Formel

$$f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = f(\mathbf{x}) - x'_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2!} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(\mathbf{x}) + \dots,$$

eingesetzt, wird

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= \int_{K_R} \varrho(\mathbf{x}') \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|} - x'_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{1}{2!} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \dots \right) d^3 x' \\ &= \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int_{K_R} \varrho(\mathbf{x}') d^3 x' - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int_{K_R} \varrho(\mathbf{x}') x'_i d^3 x' + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int_{K_R} \varrho(\mathbf{x}') x'_i x'_j d^3 x' + \dots \end{aligned}$$

Wir identifizieren diese Reihe mit (2) und berechnen  $\varphi^{(0)}$ ,  $\varphi^{(1)}$  und  $\varphi^{(2)}$ .

Es ist

$$\varphi^{(0)} = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int_{K_R} \varrho(\mathbf{x}') d^3 x' = \frac{Q}{|\mathbf{x}|}, \quad (3)$$

denn das Integral stellt gerade die Gesamtladung dar. Man sieht, daß (3) das Potentialfeld eines *elektrischen Monopoles* darstellt. Mit  $\mathbf{E}^{(0)} = -\text{grad } \varphi^{(0)}$  erhalten wir

$$\mathbf{E}^{(0)} = \frac{Q}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x},$$

wegen  $\nabla \frac{1}{|\mathbf{x}|} = -\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$ .

Das nächste Glied in der Entwicklung berechnet sich nach

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int_{K_R} \varrho(\mathbf{x}') x'_i d^3 x'. \quad (4)$$

Es ist  $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\mathbf{x}|} = -\frac{x_i}{|\mathbf{x}|^3}$ . Setzt man

$$d_i := \int \varrho(\mathbf{x}') x'_i d^3 x', \quad (5)$$

so hat man insgesamt

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{x_i}{|\mathbf{x}|^3} d_i = \frac{\mathbf{x}\mathbf{d}}{|\mathbf{x}|^3} = \frac{\hat{\mathbf{x}}\mathbf{d}}{|\mathbf{x}|^2},$$

falls man mit  $\hat{\mathbf{x}} := \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$  den Einheitsvektor in Richtung von  $\mathbf{x}$  bezeichnet. Die Größe  $\mathbf{d}$  bezeichnet man als das *Dipolmoment* der Ladungsverteilung  $\varrho(\mathbf{x})$ .

Zur Rechtfertigung dieser Bezeichnung betrachten wir den Dipol in Abb. 4.1. Aus (5) folgt mit  $\varrho(\mathbf{x}') = -q\delta(\mathbf{x}') + q\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{l})$

$$d_i = q \int (-\delta(\mathbf{x}') + \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{l})) x'_i d^3 x',$$

also  $\mathbf{d} = q\mathbf{l}$ . Dies stellt das Dipolmoment eines Dipols dar.

Das Potentialfeld des Dipols lautet (COULOMB)

$$\varphi_{\text{Di}}(\mathbf{x}) = -\frac{q}{|\mathbf{x}|} + \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{l}|}.$$

Bei der Entwicklung dieses Potentials ist  $Q = 0$ , also  $\varphi_{\text{Di}}^{(0)} = 0$ , das nächste Glied in der Reihe lautet

$$\varphi_{\text{Di}}^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}\mathbf{d}}{|\mathbf{x}|^3} = q \frac{l \cos \vartheta}{|\mathbf{x}|^2}.$$

Die Entwicklung von  $\varphi$  beginnt beim Dipol also erst beim Summand  $\varphi^{(1)}$ . Dieser Summand stellt das Potentialfeld eines *idealen* Dipols ( $l \rightarrow 0$ ,  $\mathbf{d}$  fest) dar. Bei der Entwicklung von  $\varphi$  bei einem realen Dipol bricht die Reihe bei  $\varphi^{(1)}$  nicht ab.

Wie schon vorher bei  $\varphi^{(0)}$  ermitteln wir auch für  $\varphi^{(1)}$  die dazugehörige Feldstärke  $\mathbf{E}^{(1)}$ . Mit  $\text{grad} \frac{\mathbf{x}\mathbf{d}}{|\mathbf{x}|^3} = \frac{\mathbf{d} - 3(\hat{\mathbf{x}}\mathbf{d})\hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^3}$  ist

$$\mathbf{E}^{(1)} = \frac{3(\hat{\mathbf{x}}\mathbf{d})\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{d}}{|\mathbf{x}|^3}.$$

Nun berechnen wir  $\varphi^{(2)}$ . Es gilt

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int \varrho(\mathbf{x}') x'_i x'_j d^3 x'. \quad (6)$$

Da  $\Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \frac{1}{|\mathbf{x}|} = 0$ , können wir — ohne hier schon den Sinn darin zu sehen — zu (6) die Größe

$$-\frac{1}{6} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int \varrho(\mathbf{x}') \delta_{ij} x'^2 d^3 x' \quad (7)$$

addieren, da sie identisch Null ist, denn im Falle  $i = j$  verschwindet die 2. partielle Ableitung von  $1/|\mathbf{x}|$ , ist  $i \neq j$ , so annulliert  $\delta_{ij}$  den Ausdruck. Wir haben also

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(\mathbf{x}) &= \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) \int \varrho(\mathbf{x}') \left( x'_i x'_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} x'^2 \right) d^3 x' \\ &= \frac{1}{6} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \frac{1}{|\mathbf{x}|} D_{ij}, \end{aligned} \quad (8)$$

falls wir das *Quadrupolmoment* mittels

$$D_{ij} := \int \varrho(\mathbf{x}') (3x'_i x'_j - \delta_{ij} \mathbf{x}'^2) d^3 x'$$

eingeführen.  $D_{ij}$  ist ein Tensor. Er enthält 5 unabhängige Größen, denn zunächst ist  $D_{ij} = D_{ji}$ , der Tensor ist symmetrisch. Damit sind schon 3 von den restlichen 6 Größen abhängig. Bilden wir die *Spur*  $\sum_i D_{ii}$  des Tensors, so finden wir sie zu Null. (Dadurch wird auch der Sinn der Addition von (7) offenbar.) Eine der Spurgößen ist also von den Restlichen abhängig, sodaß der Tensor  $D_{ij}$  schließlich nur noch 5 unabhängige Komponenten hat.

Nun wollen wir die partielle Ableitung in (8) berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\mathbf{x}|} &= -\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_i}{|\mathbf{x}|^3} \\ &= \begin{cases} -\frac{|\mathbf{x}|^3 - 3x_i x_j |\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|^6} & \text{falls } i = j \\ 3 \frac{x_i x_j}{|\mathbf{x}|^5} & \text{sonst} \end{cases} \\ &= 3 \frac{x_i x_j}{|\mathbf{x}|^5} - \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x}|^3}, \end{aligned}$$

also wird

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{6} D_{ij} \left( 3 \frac{x_i x_j}{|\mathbf{x}|^5} - \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x}|^3} \right) \\ &= \frac{1}{2} D_{ij} \frac{x_i x_j}{|\mathbf{x}|^5}, \end{aligned} \quad (9)$$

denn  $D_{ij} \delta_{ij} = D_{ii} = 0$ . (Summation!)

Mit dem Einheitsvektor  $\hat{\mathbf{x}}$  in Richtung von  $\mathbf{x}$  können wir

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \hat{\mathbf{x}}^T D \hat{\mathbf{x}} \quad (10)$$

schreiben, falls wir  $D = (D_{ij})$  setzen. (Dies ist eine Matrix!) Man sieht aus (10) leicht, daß  $\varphi^{(2)}$  wie  $1/|\mathbf{x}|^3$  abfällt.

Auch zu  $\varphi^{(2)}$  berechnen wir  $\mathbf{E}^{(2)}$ . Es ist wegen (9)

$$\begin{aligned} E_k^{(2)} &= -\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{x_i x_j}{2 |\mathbf{x}|^5} D_{ij} \\ &= -\frac{1}{2} D_{ij} \frac{(\delta_{ik} x_j + x_i \delta_{jk}) |\mathbf{x}|^5 - 5 x_i x_j x_k |\mathbf{x}|^3}{|\mathbf{x}|^{10}} \\ &= -\frac{1}{2} D_{ij} \left( \frac{2 \delta_{ik} x_j}{|\mathbf{x}|^5} - 5 \frac{x_i x_j}{|\mathbf{x}|^7} x_k \right) \\ &= \frac{1}{|\mathbf{x}|^4} \left( \frac{5}{2} (\hat{\mathbf{x}}^T D \hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}}_k - (D \hat{\mathbf{x}})_k \right), \end{aligned}$$

denn  $\delta_{ik} D_{ij} x_j = \delta_{ik} (D \mathbf{x})_i = (D \mathbf{x})_k$ .

Insgesamt haben wir jetzt also das Potential in die Reihe

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{|\mathbf{x}|} + \frac{\hat{\mathbf{x}} \mathbf{d}}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{1}{6} \frac{\hat{\mathbf{x}}^T D \hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^3} + \dots \quad (11)$$

entwickelt, wobei

$$\begin{aligned} Q &= \int \varrho(\mathbf{x}') d^3 x' \\ \mathbf{d} &= \int \varrho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d^3 x' \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{und } D = (D_{ij}) \text{ mit } D_{ij} = \int \varrho(\mathbf{x}') (3x'_i x'_j - \delta_{ij} \mathbf{x}'^2) d^3 x'$$

ist.

Bei fortgesetzter Entwicklung von  $\varphi$  würden alle  $2^l$ -Pole ( $l \in \mathbb{N}$ ) in der Reihe vorkommen. Die zu den  $2^l$ -Polen gehörigen Momente, die  $l$ -ten Momente von  $\varrho$ , hätten die Form

$$\int \varrho(\mathbf{x}') x'_{i_1} \cdots x'_{i_l} d^3 x'.$$

Das Potential des  $2^l$ -Poles verhält sich wie  $\frac{1}{|\mathbf{x}|^{2l+1}}$  im Unendlichen. Die Momente sind Tensoren  $l$ -ter Stufe, die  $2l + 1$  unabhängige Größen enthalten.

Zur Verdeutlichung diene das folgende Beispiel: Gesucht ist die Komponente  $D_{11}$  des Quadrupolmoments für ein homogen geladenes Ellipsoid  $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ . Es ist also  $\varrho(\mathbf{x}) = \varrho_0$ , falls  $\mathbf{x} \in E$ , sonst verschwindet  $\varrho(\mathbf{x})$ . Unter Zuhilfenahme eines Koordinatensystemes  $x', y', z'$ , das nur eine andere Bezeichnung für das Koordinatensystem  $x, y, z$  sein soll, wird

$$\begin{aligned} D_{11} &= \varrho_0 \int_E (3x'^2 - \mathbf{x}'^2) d^3 x' \\ &= \varrho_0 abc \int_{K_1} (2a^2 \tilde{x}^2 - b^2 \tilde{y}^2 - c^2 \tilde{z}^2) d^3 \tilde{x} \end{aligned}$$

nach der Substitution  $\tilde{x} = x'/a, \tilde{y} = y'/b, \tilde{z} = z'/c$  und mit  $K_1 : \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 \leq 1$ .

Es soll genügen, hier lediglich den 3. Summanden explizit auszurechnen. Mit  $\tilde{z} = r \sin \vartheta$  ist

$$\begin{aligned} -\varrho_0 abc^3 \int_{K_1} \tilde{z}^2 d^3 \tilde{x} &= -\varrho_0 abc^3 \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 \vartheta r^2 \cos \vartheta d\varphi d\vartheta dr \\ &= -2\pi \varrho_0 abc^3 \int_0^1 r^4 \frac{1}{3} [\sin^3 \vartheta]_{-\pi/2}^{\pi/2} dr \\ &= -\frac{4}{3} \pi \varrho_0 abc^3 \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^1 \\ &= -\frac{4}{15} \pi \varrho_0 abc^3 = \frac{Q}{5} (-c^2). \end{aligned}$$

Dabei bedeutet  $Q = \frac{4\pi}{3} \varrho_0 abc$  die Gesamtladung in  $E$ . Insgesamt lautet — nach Berechnung der anderen beiden Summanden — das Ergebnis der Aufgabe

$$D_{11} = \frac{Q}{5} (2a^2 - b^2 - c^2).$$

## 5. Energie

In diesem Kapitel soll der Energiebegriff der Mechanik in die Elektrostatik übertragen werden. Dies gelingt mittels der Gleichung

$$\mathbf{K} = q\mathbf{E}, \quad (1)$$

die die Kraft auf eine Ladung  $q$  an einem Ort  $\mathbf{x}$ , an dem das elektrische Feld die Stärke  $\mathbf{E}$  hat, angibt. Man sagt auch, Gleichung (1) kopple die Mechanik mit der Elektrostatik.

Wollen wir eine Punktladung im vom elektrischen Feld erzeugten Kraftfeld  $\mathbf{K}(\mathbf{x})$  vom Punkt  $A$  zum Punkt  $B$  überführen, so haben wir die Arbeit

$$W = - \int_A^B \mathbf{K} ds \quad (2)$$

zu leisten. Da  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  konservativ ist, gilt dies auch für  $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ , damit ist obiges Wegintegral wegunabhängig — eine Tatsache, die wir schon bei der Schreibweise von (2) vorweggenommen haben. Unter Benutzung des Potentials  $\varphi$  ist

$$W = -q \int_A^B \mathbf{E} ds = q \int_A^B \text{grad } \varphi ds = q (\varphi(B) - \varphi(A)). \quad (3)$$

In diesem Kapitel wollen wir als Randbedingung an das Potential immer die Forderung  $\varphi(\infty) = 0$  stellen. Führen wir nun aus dem Unendlichen eine Ladung  $q$  zum Ort  $\mathbf{x}$ , so haben wir nach (3) die Arbeit

$$W = q\varphi(\mathbf{x}) \quad (4)$$

zu leisten. Diese Arbeit steckt nach der Überführung als Energie in der Ladungsverteilung.

Um die Energie einer Anordnung von  $N$  Punktladungen  $q_i$  an den Orten  $\mathbf{x}_i$  zu berechnen, überführen wir diese nacheinander aus dem Unendlichen an den vorgesehenen Ort.

Zunächst ist  $\varrho \equiv 0$ , damit  $\varphi \equiv 0$ , es existiert also kein elektrisches Feld. Um die Ladung  $q_1$  an den Ort  $\mathbf{x}_1$  zu überführen, haben wir also keine Arbeit zu leisten. Die Anordnung enthält demnach keine Energie. Nun fahren wir mit der Ladung  $q_2$  fort. Das Potential von  $q_1$  ist  $\varphi(\mathbf{x}) = q_1 / |\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|$ . Bringen wir also  $q_2$  nach  $\mathbf{x}_2$ , so ist  $W = q_2 q_1 / |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$ . Aufgrund der Additivität des Potentials lautet dieses jetzt  $\varphi(\mathbf{x}) = q_1 / |\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| + q_2 / |\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|$ , sodaß nach Überführung von  $q_3$  nach  $\mathbf{x}_3$  (insgesamt)  $W = q_2 q_1 / |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| + q_3 q_1 / |\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1| + q_3 q_2 / |\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2|$  wird. Für  $N$  Ladungen erhält man also

$$W = \sum_{\substack{i,k=1 \\ i < k}}^N \frac{q_i q_k}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^N \frac{q_i q_k}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|}, \quad (5)$$

da der Ausdruck unter der Summe unter Vertauschung der Indizes symmetrisch ist.

Hier sei noch darauf hingewiesen, daß das oben praktizierte Verfahren zum Aufbau einer Ladungsverteilung mit diskreten Punktladungen zu einer Inkonsistenz führen kann. Dies führt dann zum Begriff der *Selbstenergie* einer Ladung. Denn anstatt die Ladung  $q_1$  als Ganzes nach  $\mathbf{x}_1$  zu überführen, könnten wir auch auf die Idee kommen, zunächst eine Hälfte dieser Ladung nach  $\mathbf{x}_1$ , und dann, im Feld dieser, die andere Hälfte unter Arbeitsaufwand auch nach  $\mathbf{x}_1$  zu schaffen. Jetzt würden wir dieser Ladung  $q_1$  plötzlich eine Energie zuschreiben. Diese Energie steckt aber bei dem zuerst praktizierten Verfahren schon im Unendlichen in der Ladung  $q_1$ , denn diese muß ja auch zunächst aus kleineren Ladungen zusammengestellt werden. Machen wir das mit infinitesimal kleinen Ladungen  $dq$ , so wird — wie wir an geeigneter Stelle sehen werden — die Größe  $\infty$  groß. Tatsächlich aber löst die Existenz einer Elementarladung diesen gordischen Knoten.

Sei jetzt eine kontinuierliche Ladungsverteilung vorgegeben. Um ihre Energie zu berechnen, ersetzen wir in (5)  $q_i \rightarrow \varrho(\mathbf{x}) d^3 x$  und  $q_k \rightarrow \varrho(\mathbf{x}') d^3 x'$ , die Summe wird zu dem Integral

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{\varrho(\mathbf{x}) \varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x d^3 x', \quad (6)$$

das, da wir den Fall  $i \neq k$  nicht — wie bei der Summe — ausschließen können, die Selbstenergie enthält. Mit der COULOMB-Lösung  $\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{\varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3x'$  vereinfacht sich (6) zu

$$W = \frac{1}{2} \int \varrho(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) d^3x. \quad (7)$$

Aus dieser Gleichung kann  $\varrho(\mathbf{x})$  eliminiert werden, denn mittels der POISSON-Gleichung  $\Delta\varphi = -4\pi\varrho$  wird

$$W = -\frac{1}{8\pi} \int \varphi \Delta\varphi d^3x. \quad (8)$$

Dieser Ausdruck verlockt zu partieller Integration, die auch in der Tat — unter zuhelfenahme der 1. GREENSchen Formel 3(3) ausgeführt werden kann. Setzt man  $\Psi \equiv \varphi$  in 3(3), so erhält man

$$\int_V \Psi \Delta\Psi d^3x = \int_{\partial V} \Psi \frac{\partial}{\partial n} \Psi dF - \int_V (\text{grad } \Psi)^2 d^3x, \quad (9)$$

aus (8) wird also

$$W = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial K_\infty} \varphi \text{grad } \varphi d\mathbf{F} + \frac{1}{8\pi} \int_{K_\infty} (\text{grad } \varphi)^2 d^3x$$

oder

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (\text{grad } \varphi)^2 d^3x,$$

denn das Oberflächenintegral verschwindet, falls  $\varphi$  wie  $1/r$  oder schneller für  $r \rightarrow \infty$  gegen Null geht. Mit  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$  erhalten wir

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}^2 d^3x. \quad (10)$$

Diese Gleichung zeigt uns, daß man die Energie in der Ladungsverteilung vollständig dem elektrischen Feld zuschreiben kann. In diesem Sinne ist das Feld also Träger der Energie. Ein Blick auf (10) zeigt außerdem, daß stets  $W \geq 0$  ist.

Unter der Annahme, daß ein Elektron punktförmige Ausdehnung besitzt, liefert (10) mit  $r \equiv |\mathbf{x}|$  und  $\varphi = -e/r$  ( $e > 0$ ), also  $\mathbf{E} = -\frac{e}{r^3}\mathbf{x}$  den Wert

$$\begin{aligned} W &= \frac{e^2}{8\pi} \int \frac{d^3x}{|\mathbf{x}|^4} \\ &= \frac{e^2}{8\pi} 2\pi \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2 \cos\vartheta}{r^4} d\vartheta dr \\ &= \frac{e^2}{2} \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{e^2}{2} \frac{1}{r} \Big|_\infty^0, \end{aligned}$$

welcher offensichtlich divergent ist. Eine Punktladung hätte eine unendlich große Selbstenergie.

Nehmen wir (klassisch) an, das Elektron hätte den Radius  $r_e$ , und die Ladung wäre gleichmäßig auf dessen Oberfläche verteilt — daraus folgt, daß  $\mathbf{E}$  im Innern identisch verschwindet — so wäre nach unserer Rechnung

$$W = \frac{e^2}{2r_e}.$$

Ist diese Selbstenergie so groß wie die Ruhemasse des Elektrons, so ist  $e^2/2r_e = mc^2$ . Falls die Ladung jedoch nicht vollständig auf der Oberfläche des "klassischen Elektrons" verteilt ist, sondern sich auch im Innern etwas Ladung ist, so vergrößert sich die Selbstenergie, der Faktor  $1/2$  fällt etwas größer aus. Dies führt zur Definition des *klassischen Elektronenradius*  $r_e = \frac{e^2}{mc^2}$ .

Zum Abschluß dieses Kapitels soll zur Übung mit (10) die Energie von 2 Punktladungen berechnet werden. Aus  $\varphi(\mathbf{x}) = \frac{q_1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|} + \frac{q_2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_2|}$  folgt durch Gradientenbildung  $\mathbf{E} = q_1 \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|^3} + q_2 \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_2|^3}$ , also ist

$$\mathbf{E}^2 = \frac{q_1^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|^4} + \frac{q_2^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_2|^4} + 2q_1q_2 \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|^3|\mathbf{x}-\mathbf{x}_2|^3}.$$

Dabei stellen die ersten 2 Summanden die Selbstenergie der Punktladungen dar. Diese sollen unberücksichtigt bleiben. Wir erhalten aus (10)

$$W = \frac{q_1q_2}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|^3|\mathbf{x}-\mathbf{x}_2|^3} d^3x.$$

Mit  $\vec{\varrho} := \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}$  ist  $\left| \det \left( \frac{\partial \varrho_i}{\partial x_k} \right) \right| = \frac{1}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|^3}$ , also  $d^3x = |\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|^3 d^3\varrho$ . Setzen wir außerdem  $\mathbf{e} := \frac{\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}$ , so ist  $\vec{\varrho} + \mathbf{e} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}$ , insgesamt also

$$\begin{aligned} W &= \frac{q_1q_2}{4\pi} \int \frac{\vec{\varrho}(\vec{\varrho} + \mathbf{e})}{|\vec{\varrho}|^3|\vec{\varrho} + \mathbf{e}|^3} \frac{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|^3}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|^4} d^3\varrho \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{q_1q_2}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|} \int \frac{\vec{\varrho}(\vec{\varrho} + \mathbf{e})}{|\vec{\varrho}|^3|\vec{\varrho} + \mathbf{e}|^3} d^3\varrho. \end{aligned}$$

Wir erinnern uns an  $\text{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$  und stellen fest, daß die 2 Faktoren des Integranden genau diese Form haben. Damit folgt

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{4\pi} \frac{q_1q_2}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|} \int \text{grad} \frac{1}{|\vec{\varrho}|} \text{grad} \frac{1}{|\vec{\varrho} + \mathbf{e}|} d^3\varrho \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{q_1q_2}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|} \left( \oint \frac{1}{|\vec{\varrho} + \mathbf{e}|} \text{grad} \frac{1}{|\vec{\varrho}|} d\mathbf{F} - \int \frac{1}{|\vec{\varrho} + \mathbf{e}|} \Delta \frac{1}{|\vec{\varrho}|} d^3\varrho \right), \end{aligned}$$

wobei — ähnlich wie in (9), mit der 1. GREENSchen Formel — partiell integriert wurde. Da  $1/|\varrho|$  Lösung der POISSON-Gleichung ist, gilt  $\Delta(1/|\varrho|) = -4\pi\delta(\vec{\varrho})$ , also

$$\begin{aligned} W &= \frac{q_1q_2}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|} \int \frac{\delta(\vec{\varrho})}{|\vec{\varrho} + \mathbf{e}|} d^3\varrho \\ &= \frac{q_1q_2}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}, \end{aligned}$$

da  $|\mathbf{e}| = 1$ .

## 6. Energie im äußeren Feld

Wir stellen uns in diesem sehr kurzen Kapitel ein elektrostatisches Feld  $\varphi_A$  vor, das von einer Ladungsverteilung  $\varrho_A$  erzeugt sein soll. Zusätzlich zu dieser Ladungsverteilung soll eine weitere,  $\varrho_0$  dazukommen. Die gesamte Ladungsverteilung ist also

$$\varrho = \varrho_A + \varrho_0. \quad (1)$$

Unser Ziel ist es nun, die Energie der Ladungsverteilung  $\varrho_0$  im von  $\varrho_A$  erzeugten Felde zu berechnen.

Aufgrund der Ergebnisse des vorhergehenden Kapitels ist diese Energie

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{\varrho(\mathbf{x})\varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3x d^3x'. \quad (2)$$

Setzt man für  $\varrho(\mathbf{x})$  die Zerlegung (1), so ist  $\varrho(\mathbf{x})\varrho(\mathbf{x}') = \varrho_A(\mathbf{x})\varrho_A(\mathbf{x}') + \varrho_0(\mathbf{x})\varrho_0(\mathbf{x}') + \varrho_A(\mathbf{x})\varrho_0(\mathbf{x}') + \varrho_0(\mathbf{x})\varrho_A(\mathbf{x}')$ . Dabei liefern die ersten 2 Summanden die Selbstenergien der Ladungsverteilungen  $\varrho_0$

bzw.  $\varrho_A$ , die uns hier nicht interessieren, wir lassen sie also weg. Die beiden letzten Summanden schreiben wir als  $2\varrho_0(\mathbf{x})\varrho_A(\mathbf{x}')$ , denn das Integral in (2) ist symmetrisch bezüglich der Vertauschung von  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x}'$ . Damit ist dann

$$W = \int \frac{\varrho_0(\mathbf{x})\varrho_A(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x d^3x' = \int \varrho_0(\mathbf{x})\varphi_A(\mathbf{x}) d^3x. \quad (3)$$

Diese Energie soll nun in einer Reihe dargestellt werden. Dazu entwickeln wir das Potential  $\varphi_A$  des äußeren Feldes. Es ist

$$\varphi_A(\mathbf{x}) = \varphi_A(0) + x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_A(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=0} + \frac{1}{2} x_i x_k \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \varphi_A(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=0} + \dots, \quad (4)$$

womit (3) zu

$$\begin{aligned} W &= \int \varrho_0(\mathbf{x}) \left[ \varphi_A(0) + x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_A(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=0} + \frac{1}{2} x_i x_k \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \varphi_A(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=0} + \dots \right] d^3x \\ &= Q\varphi_A(0) + d_i \frac{\partial \varphi_A}{\partial x_i}(0) + \frac{1}{6} D_{ik} \frac{\partial^2 \varphi_A}{\partial x_i \partial x_k}(0) + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

wird.  $\varrho_0(\mathbf{x})$  soll natürlich nur auf einer kleinen Kugel nicht identisch verschwinden,  $\varphi_A$  soll auf eben dieser "nicht zu stark schwanken". Benutzt man das elektrische Feld  $\mathbf{E}$ , so wird (5) zu

$$W = Q\varphi_A(0) - \mathbf{d}\mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} D_{ik} \frac{\partial E_k}{\partial x_i}(0) + \dots \quad (6)$$

Aus (6) liest man ab, daß das äußere Potential nur mit der Gesamtladung, das elektrische Feld mit dem Dipolmoment, der Gradient des elektrischen Feldes mit dem Dipolmoment ad infinitum wechselwirkt.

## 7. Kapazität

$N$  mit der Ladung  $Q_i$  geladene Leiter  $\mathcal{L}_i$  erzeugen ein elektrisches Feld. Zwischen den Potentialen der Leiter und deren Ladungen besteht eine Beziehung, die im folgenden hergeleitet werden soll.

Zunächst sei  $\varphi_i(\mathbf{x})$  das Potential, das eine Einheitsladung, die sich auf dem Leiter  $\mathcal{L}_i$  befindet, erzeugt. Dabei seien alle anderen Leiter ungeladen, d.h. für die Ladung  $Q_j$  auf dem Leiter  $\mathcal{L}_j$  gilt die Beziehung  $Q_j = Q_i \delta_{ij}$ .

Jetzt seien die Leiter  $\mathcal{L}_i$  mit den Ladungen  $Q_i$  geladen. Dann gilt für das Potentialfeld  $\Phi(\mathbf{x})$  die Beziehung

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N Q_i \varphi_i(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Um dies zu beweisen, ist zu zeigen, daß  $\Phi(\mathbf{x})$  die POISSON-Gleichung erfüllt und weiterhin, daß  $\Phi$  auf jedem  $\mathcal{L}_i$  konstant ist. Ferner muß gezeigt werden, daß bei diesem  $\Phi$  auf den Leitern  $\mathcal{L}_i$  die Ladungen  $Q_i$  sitzen.

Das erste ist klar, denn sei  $\mathbf{x} \notin \mathcal{L}_i$  für beliebiges  $i$ , also  $\mathbf{x} \in V$  mit  $V = \mathbf{R} \setminus (\bigcup_i \mathcal{L}_i)$ , dann gilt  $\Delta \Phi = \Delta \sum Q_i \varphi_i = \sum Q_i \Delta \varphi_i = 0$ , da für alle  $j$  die POISSON-Gleichung  $\Delta \varphi_j = 0$  für beliebiges  $\mathbf{x} \notin \mathcal{L}_j$  erfüllt ist.

Nun zu den Randwerten. Sei  $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_i$ . Da dann  $\varphi_i(\mathbf{x}) = \text{const}$  auf ganz  $\mathcal{L}_j$ , so ist auch  $\Phi(\mathbf{x}) = \sum_i Q_i \varphi_i(\mathbf{x})$  auf ganz  $\mathcal{L}_j$  konstant, für beliebiges  $j$ . Damit ist das Potential eindeutig bestimmt. Es kann nur  $\Phi$  sein.

Für die Ladung auf dem Leiter  $\mathcal{L}_i$  erhält man  $\int_{\mathcal{L}_i} \varrho d^3x = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{L}_i} \text{div } \mathbf{E} d^3x = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial \mathcal{L}_i} \mathbf{E} d\mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial \mathcal{L}_i} \text{grad } \Phi d\mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi} \sum_j Q_j \int_{\partial \mathcal{L}_i} \text{grad } \varphi_j d\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi} \sum_j Q_j \int_{\partial \mathcal{L}_i} \mathbf{E}_j d\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi} \sum_j Q_j \int_{\mathcal{L}_i} \text{div } \mathbf{E}_j d^3x = \sum_j Q_j \delta_{ij} = Q_i$ , womit (1) bewiesen wäre.

Das Potential  $\Phi(j)$  auf dem  $j$ -ten Leiter  $\mathcal{L}_j$  erhält man zu  $\Phi(j) = \sum_i Q_i \varphi_i(j)$ . Die  $\varphi_i(j)$  sind offensichtlich nur von der Geometrie der Anordnung abhängige Konstanten. Wir nennen sie  $a_{ij} := \varphi_i(j)$ . Dann gilt der Zusammenhang  $\Phi(j) = \sum_i Q_i a_{ij} = \sum_i \tilde{a}_{ji} Q_i$ , wobei  $\tilde{a}_{ji} = a_{ij}$ . Dieses Gleichungssystem läßt sich nach den  $Q_i$  auflösen. Sei nämlich  $c_{kj} \tilde{a}_{ji} = \delta_{ki}$ , dann wird  $c_{kj} \Phi(j) = c_{kj} \tilde{a}_{ji} Q_i = \delta_{ki} Q_i = Q_k$ , wir haben also

$$Q_k = \sum_j c_{kj} \Phi(j). \quad (2)$$

Diese  $c_{kj}$  nennt man *Kapazitätskoeffizienten*. Es handelt sich um rein geometrische Größen.

Nun betrachten wir einen Spezialfall: Die Anzahl der Leiter sei 2, es sei nicht  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ , sondern nur  $U = \Phi_2 - \Phi_1$  vorgegeben, außerdem gelte  $Q_1 = -Q_2 = Q$ . Dann lautet das Gleichungssystem (3)

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 = c_{11} \Phi_1 + c_{12} \Phi_2 \\ -Q &= c_{21} \Phi_1 + c_{22} \Phi_2. \end{aligned}$$

Wegen der zweiten dieser Gleichungen gilt  $c_{1i} = -c_{2i}$ . Wir setzen  $\Phi_2 = U + \Phi_1$  und erhalten mit der ersten Gleichung

$$\begin{aligned} Q &= c_{11} \Phi_1 + c_{12} (U + \Phi_1) \\ &= (c_{11} + c_{12}) \Phi_1 + c_{12} U. \end{aligned}$$

Da  $Q = 0 \Leftrightarrow U = 0$  sein soll, ist also notwendig  $c_{11} + c_{12} = 0$ , insgesamt also

$$Q = c_{12} U.$$

An dieser Stelle seien nun 2 Beispiele angebracht. Bei einem Plattenkondensator mit 2 ebenen Platten der Fläche  $F$  im Abstand  $d$  sei  $Q_1 = Q$ ,  $Q_2 = -Q$ . Offensichtlich gilt  $4\pi Q = EF$  und  $U = \Delta \Phi = Ed$ , insgesamt also  $Q = \frac{F}{4\pi d} U$ . (Im GAUSSSchen Maßsystem hat die Kapazität die Einheit einer Länge.)

Ein Kugelkondensator besteht aus 2 konzentrischen Hohlkugeln mit Radien  $r_1$  und  $r_2$ , wobei  $r_1 < r_2$ . Auf der Inneren der Hohlkugeln sitze die Ladung  $Q$ , außen  $-Q$ . Wir berechnen die Radialkomponente des elektrischen Feldes an der Stelle  $r$ , wobei  $r_1 \leq r \leq r_2$ . Es ist  $4\pi Q = E_r \cdot 4\pi r^2$ , also  $E_r = Q/r^2$ . Für die Spannung zwischen den Platten erhalten wir  $U = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = Q \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = Q \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$ . Damit ist  $C = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$ . Mit  $r_2 \rightarrow \infty$  wird  $C = r_1$ .

Jetzt wird es von Interesse sein, zu berechnen, wie groß die Energie unseres Systemes von Leitern  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_N$  bei den Ladungen  $Q_1, \dots, Q_N$  bzw. den Potentialen  $\Phi_1, \dots, \Phi_N$  ist. Es gilt

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int \varrho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) d^3 x = \frac{1}{2} \sum_j \int_{\mathcal{L}_j} \varrho(\mathbf{x}_j) \Phi(\mathbf{x}_j) d^3 x \\ &= \sum_j \frac{1}{2} \Phi(j) \int_{\mathcal{L}_j} \varrho(\mathbf{x}) d^3 x = \frac{1}{2} \sum_j Q_j \Phi(j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_j Q_j \sum_i \tilde{a}_{ji} Q_i = \frac{1}{2} \sum a_{ij} Q_i Q_j \\ &= \frac{1}{2} \sum c_{ij} \Phi(i) \Phi(j). \end{aligned}$$

Ob wir die Energie in Abhängigkeit der Ladungen oder in Abhängigkeit der Potentiale berechnen, stets resultieren quadratische Formen.

Wir wollen an dieser Stelle noch eine interessante Eigenschaft der Energie der Ladungsverteilung auf Leitern demonstrieren.

Seien wieder die Leiter  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_N$  vorgegeben, auf denen die Ladungen  $Q_1, \dots, Q_N$  sitzen sollen. Bei Variation der Ladungsverteilung auf den jeweiligen Leitern — nicht der jedoch der

Gesamtladung auf den Leitern,  $\delta Q_i = 0$  — erhalten wir für die Variation  $\delta W$  der Energie  $W = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}^2 d^3x$  an der Stelle des tatsächlichen elektrischen Feldes  $\tilde{\mathbf{E}}$  wegen

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{1}{4\pi} \int \tilde{\mathbf{E}} \delta \tilde{\mathbf{E}} d^3x = -\frac{1}{4\pi} \int \text{grad } \tilde{\Phi} \delta \tilde{\mathbf{E}} d^3x \\ &= -\frac{1}{4\pi} \oint \tilde{\Phi} \delta \tilde{\mathbf{E}} d\mathbf{F} + \frac{1}{4\pi} \int \tilde{\Phi} \text{div } \delta \tilde{\mathbf{E}} d^3x \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \tilde{\Phi} \delta (\text{div } \tilde{\mathbf{E}}) d^3x \\ &= \int \tilde{\Phi} \delta \tilde{\rho} d^3x \\ &= \sum_i \tilde{\Phi}_i \int_{\mathcal{L}_i} \delta \tilde{\rho} d^3x = \sum_i \tilde{\Phi}_i \delta \int_{\mathcal{L}_i} \tilde{\rho} d^3x \\ &= \sum_i \tilde{\Phi}_i \delta \tilde{Q}_i = 0 \end{aligned}$$

die Aussage, daß das Funktional der Energie für die tatsächlich angenommene Ladungsverteilung  $\tilde{\rho}$  extremal wird. Da aber  $W$  nach oben nicht beschränkt ist, muß es sich bei dem Extremum um ein Minimum handeln.

Dasselbe erhält man, wenn man den Leitern  $\mathcal{L}_i$  feste Potentiale  $\Phi_i$  zuschreibt und das Feld variiert. Es ist

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \delta \int_{\mathbf{R} \setminus \mathcal{L}} (\text{grad } \Phi)^2 d^3x = \frac{1}{4\pi} \int \text{grad } \Phi \text{ grad } \delta \Phi d^3x.$$

Wegen  $\text{div}(\text{grad } \Phi \delta \Phi) = \Delta \Phi \delta \Phi + \text{grad } \Phi \text{ grad } \delta \Phi$  wird daraus

$$\begin{aligned} \delta W &= -\frac{1}{4\pi} \int \Delta \Phi \delta \Phi d^3x + \frac{1}{4\pi} \int \text{div}(\text{grad } \Phi \delta \Phi) d^3x \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial \mathcal{L}} \text{grad } \Phi \delta \Phi d\mathbf{F} = 0. \end{aligned}$$

Der erste Summand der rechten Seite der Gleichung in der ersten Zeile verschwindet wegen der POISSON-Gleichung, das Oberflächenintegral wird zu Null, weil  $\Phi$  auf den Leiteroberflächen nicht variiert wird.

## 8. Elektrodynamik

Zunächst soll an den Gegenstand des Kapitels 1 — den MAXWELL-Gleichungen — erinnert werden. Diese lauten

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (2)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{H}, \quad (3)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (4)$$

Es sei bemerkt, daß diese Gleichung Zeittranslationssymmetrie besitzen, d.h. daß die Transformation  $t \mapsto t + \tau$  sie forminvariant läßt.

Im Kapitel über Energie haben wir die Beziehung

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}^2 d^3x$$

hergeleitet. Wir definieren damit die *Energiedichte* im elektrostatischen Feld durch

$$w = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2.$$

Im Falle der Elektrodynamik setzen wir für die Energiedichte den Ausdruck

$$w = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) \quad (5)$$

an und untersuchen, ob dies konsistent ist. Dazu bilden wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} w &= \frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \mathbf{H} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} (c \operatorname{rot} \mathbf{H} - 4\pi \mathbf{j}) - \mathbf{H} c \operatorname{rot} \mathbf{E}) \\ &= \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} (\operatorname{rot} \mathbf{H}) - \mathbf{H} (\operatorname{rot} \mathbf{E})) - \mathbf{E} \mathbf{j} \\ &= -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also

$$\frac{\partial}{\partial t} w + \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{E} \mathbf{j}. \quad (6)$$

Dies stellt den Energieerhaltungssatz dar. Man nennt  $\frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  die *Energiestromdichte* oder den POYNTING-Vektor. Um diesen Begriff zu klären, nehmen wir zunächst  $\mathbf{j} \equiv 0$  an und integrieren (6) über ein Volumen  $V$ . Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \int w dV + \int \operatorname{div} \left( \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \right) dV = \frac{\partial}{\partial t} W + \int_{\partial V} \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} d\mathbf{F} = 0.$$

Es gilt also  $\dot{W} = -\int_{\partial V} \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} d\mathbf{F}$ . Sei jetzt  $\mathbf{j} \neq 0$ . Der Strom bestehe aus einzelnen Ladungen  $q$ , dann spezialisiert  $\mathbf{j} = \varrho \mathbf{v}$  zu  $\mathbf{j} = q\mathbf{v}$ . Dann ist  $\mathbf{E} \mathbf{j} = \mathbf{E} q\mathbf{v} = \mathbf{K} \mathbf{v} = m \dot{\mathbf{v}} \mathbf{v} = \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2)$ . Die Größe  $\mathbf{E} \mathbf{j}$  stellt also gerade die Änderung der kinetischen Energie der den Strom ausmachenden Ladungsträger dar.

Jetzt soll noch eine wichtige Erfahrungstatsache diskutiert werden: Die Tatsache, daß die Ladung eine Erhaltungsgröße darstellt. Sei dazu  $V$  ein Integrationsgebiet, dann ist  $Q_V = \int_V \varrho dV$  die darin befindliche Ladung. Ihre zeitliche Änderung ist  $\dot{Q}_V = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho dV$ . Die durch die Oberfläche  $\partial V$  des Volumens fließende Ladungsmenge ist  $I = \int_{\partial V} \varrho \mathbf{v} d\mathbf{F}$ . Der Erhaltungssatz fordert nun  $\dot{Q}_V + I = 0$ , oder, in integraler Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho dV + \int_{\partial V} \varrho \mathbf{v} d\mathbf{F} = 0.$$

Die Größe  $\varrho \mathbf{v}$  ist die Stromdichte  $\mathbf{j}$ ; beachten wir dies, so folgt mit dem GAUSSSche Satz aus

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho dV + \int_{\partial V} \mathbf{j} d\mathbf{F} = 0 \quad (7)$$

die Gleichung

$$\int_V \left( \frac{\partial}{\partial t} \varrho + \operatorname{div} \mathbf{j} \right) dV = 0.$$

Das Integrationsgebiet  $V$  können wir beliebig wählen, d.h. es muß

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (8)$$

sein. Dies ist die *Kontinuitätsgleichung* in differentieller Form.

Zu zeigen bleibt, daß die Ladungserhaltung konsistent mit den MAXWELL-Gleichungen ist. Dies ist in der Tat so, was uns  $\partial_t \varrho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \partial_t \mathbf{E} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}) = -\operatorname{div} \mathbf{j}$  lehrt.

## 9. Lösung der MAXWELL-Gleichungen

Wir beginnen mit der Gleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (1)$$

welche offensichtlich durch

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (2)$$

mit beliebigem Vektorfeld  $\mathbf{A}$  gelöst wird, denn es ist  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$ . Die Größe  $\mathbf{A}$  nennt man das *Vektorpotential*. Fortfahrend versuchen wir

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{H} \quad (3)$$

zu behandeln. Dazu benutzt man natürlich zunächst (2) für  $\mathbf{H}$  und gelangt zu

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{H} = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \partial_t \mathbf{A},$$

also

$$\operatorname{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} \right) = 0.$$

Dies zu lösen ist einfach, es wurde schon im 2. Kapitel vorgeführt. Die Lösung lautet hier

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} = -\operatorname{grad} \phi,$$

wobei  $\phi$  eine beliebige skalare Ortsfunktion ist. Zusammengefaßt ist also

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\operatorname{grad} \phi - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (4)$$

Die 6 unbekanntten Felder  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  sind damit auf 4 unbekanntte Felder  $\mathbf{A}$ ,  $\phi$  reduziert.

Wir versuchen jetzt, ein Gradientenfeld  $\operatorname{grad} \Lambda$  zu  $\mathbf{A}$  zu addieren, d.h. die Transformation

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \operatorname{grad} \Lambda \quad (5)$$

durchzuführen. Diese läßt  $\mathbf{H}$  *invariant*, denn

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \rightarrow \operatorname{rot} (\mathbf{A} + \operatorname{grad} \Lambda) = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}.$$

Das elektrische Feld transformiert dabei

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\operatorname{grad} \phi - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} \rightarrow -\operatorname{grad} \phi - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} - \frac{1}{c} \operatorname{grad} (\partial_t \Lambda) \\ &= \mathbf{E} - \frac{1}{c} \operatorname{grad} (\partial_t \Lambda), \end{aligned}$$

ist also nicht invariant. Transformiert man jedoch gleichzeitig mit (5)

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \partial_t \Lambda, \quad (6)$$

so verschwindet dieser letzte Summand, damit ist aber auch  $\mathbf{E}$  invariant. ( $\mathbf{H}$  wird davon nicht berührt, da in (2)  $\phi$  nicht vorkommt.) Die Transformation

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A} + \operatorname{grad} \Lambda \\ \phi &\rightarrow \phi - \frac{1}{c} \partial_t \Lambda \end{aligned} \quad (7)$$

nennt man eine *Eichtransformation*. Die 4 Felder  $\mathbf{A}$ ,  $\phi$  sind also bei festen  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  beileibe nicht eindeutig, denn die Transformation (7) ändert an den Feldern  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  nichts. Auf den Nenner gebracht, können wir also  $\phi$  und  $\mathbf{A}$  im Rahmen der Eichtransformation (7) völlig beliebig wählen.

Wenden wir uns nun der MAXWELL-Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (8)$$

zu. Mit  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$  und  $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A}$  erhält man

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -\text{grad } \left( \frac{1}{c} \partial_t \phi \right) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

mit der Identität  $\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$  schließlich

$$\left( \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta \right) \mathbf{A} + \text{grad} \left( \frac{1}{c} \partial_t \phi + \text{div } \mathbf{A} \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (9)$$

Um dies zu vereinfachen, führen wir zunächst den Operator  $\square \equiv \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta$  ein. Man nennt ihn “*Quabla*” (in Anlehnung an das “Nabla”), manchmal auch den D’ALEMBERT’schen Operator. (D’ALEMBERT hat als erster eine allgemeine Lösung der Wellengleichung in einer Raumdimension angegeben.) Weiterhin nutzen wir an dieser Stelle die angesprochene Eichfreiheit aus, indem wir

$$\frac{1}{c} \partial_t \phi + \text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (10)$$

wählen. Diese spezielle Eichung nennt man LORENTZ-Eichung. Dazu die Rechtfertigung, daß das überhaupt möglich ist: Es sei  $f := \frac{1}{c} \partial_t \phi + \text{div } \mathbf{A}$ . Durch Eichung wird  $f \rightarrow \frac{1}{c} \partial_t \phi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Lambda + \text{div } \mathbf{A} + \Delta \Lambda = f - \square \Lambda \stackrel{!}{=} 0$ . Die Eichung ist also möglich, falls  $\square \Lambda = f$  eine Lösung besitzt, und dies ist — für nicht gar zu pathologisches  $f$  — tatsächlich der Fall, was aber an dieser Stelle nicht bewiesen werden soll. Damit haben wir die Eichtransformation ausgenutzt. Man spricht — wie schon geschehen — von einer *Eichfixierung* oder auch *Eichung*. An dieser Stelle prüft man leicht nach, daß immer noch eine eingeschränkte Eichfreiheit besteht: die Eichtransformation mit  $\square \Lambda = 0$ . Nach der Eichfixierung schreibt sich (9) jetzt in der übersichtlichen Form

$$\square \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (11)$$

Zuletzt lösen wir die Gleichung

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi \varrho. \quad (12)$$

Es ist

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E} &= -\text{div grad } \phi - \frac{1}{c} \partial_t \text{div } \mathbf{A} \\ &= -\Delta \phi + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi - \frac{1}{c} \partial_t \left( \frac{1}{c} \partial_t \phi + \text{div } \mathbf{A} \right) \\ &= \square \phi, \end{aligned}$$

also insgesamt

$$\square \phi = 4\pi \varrho, \quad (13)$$

womit unsere Aufgabe erledigt wäre.

Zum Schluß sollen die Ergebnisse dieses Kapitels nochmals in voller Eichinvarianz dargestellt werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \square \mathbf{A} + \text{grad} \left( \frac{1}{c} \partial_t \phi + \text{div } \mathbf{A} \right) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \\ \square \phi - \frac{1}{c} \partial_t \left( \frac{1}{c} \partial_t \phi + \text{div } \mathbf{A} \right) &= 4\pi \varrho, \end{aligned} \quad (14)$$

was nach LORENTZ-Eichung

$$\frac{1}{c} \partial_t \phi + \text{div } \mathbf{A} = 0$$

zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} \square \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \\ \square \phi &= 4\pi \varrho \end{aligned} \quad (15)$$

wird. Diese besitzen noch die eingeschränkte Eichinvarianz mit  $\square \Lambda = 0$ .

## 10. Wellengleichung und Lösungen

Die *Wellengleichung* ist eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung. In den 4 Dimensionen Raum und Zeit lautet sie in homogener Form

$$\square f(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (1)$$

wobei  $\square \equiv \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta$  den Quabla-Operator darstellt.

Um einige Eigenschaften von (1) zu erkennen, beschränken wir uns zunächst auf eine Raumdimension und die Zeit. Dann ist  $\Delta = \partial_x^2$ , (1) wird also zu

$$\left( \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \partial_x^2 \right) f(t, x) = 0. \quad (2)$$

Die allgemeine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung lautet

$$f(t, x) = f_1(ct - x) + f_2(ct + x), \quad (3)$$

mit beliebigen Funktionen — dies ist *cum grano salis* zu nehmen —  $f_1$  und  $f_2$ . Diese Lösung heißt die D'ALEMBERTsche *Lösung*.

Als Anmerkung sei gesagt, daß man diese Lösung leicht findet, wenn man die Koordinaten  $\xi = ct - x$  und  $\eta = ct + x$  einführt. Damit erhält man aus (2) die Differentialgleichung  $\partial_\xi \partial_\eta f = 0$ , welche man durch Integration leicht löst.

Die Lösung (3) kann man an die Anfangswerte  $g(x) = f(0, x)$  und  $h(x) = \dot{f}(0, x)$  anpassen, indem man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} g'(x) &= -f_1'(-x) + f_2'(x) \\ h(x) &= cf_1'(-x) + cf_2'(x) \end{aligned}$$

löst.

In 4 Dimensionen ist die Wellengleichung nicht so einfach zu lösen. Wir versuchen den Ansatz

$$f(t, \mathbf{x}) = ae^{i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})}. \quad (4)$$

Einsetzen in die Wellengleichung liefert

$$\square f = a \left( -\omega^2 \frac{1}{c^2} + \mathbf{k}^2 \right) e^{i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})} \stackrel{!}{=} 0,$$

abgesehen von der trivialen Lösung muß also

$$\omega^2 = c^2 \mathbf{k}^2 \quad (5)$$

oder  $\omega = \pm ck$  mit  $k \equiv |\mathbf{k}|$  sein.

Zunächst ist  $f(t + \tau, \mathbf{x}) = ae^{i(\omega t + \omega \tau + \mathbf{k}\mathbf{x})} = ae^{i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})} = f(t, \mathbf{x})$  genau dann, wenn  $\tau = 2\pi/\omega$ , oder ein ganzzahliges Vielfaches davon ist.  $f$  ist also in  $t$  periodisch mit der Periode  $\tau$ . Man nennt  $\nu = \omega/(2\pi) = 1/\tau$  die *Frequenz* und  $\omega = 2\pi\nu$  die *Kreisfrequenz* der Welle. Die Gleichung  $\mathbf{k}\mathbf{x} = \text{const}$  stellt eine Ebenengleichung dar; überall auf dieser Ebene hat die Wellenfunktion den gleichen Wert. Dies rechtfertigt die Bezeichnung *ebene Welle* von (4), falls (5) gilt.

Es ist  $\mathbf{k}(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{k}/k) = 2\pi + \mathbf{k}\mathbf{x}$ , falls  $\lambda = 2\pi/k$ . Diese Größe heißt *Wellenlänge* der ebenen Welle,  $k$  die *Wellenzahl*. Es ist  $\omega = \pm ck$ , mit  $\omega = 2\pi\nu$  und  $k = 2\pi/\lambda$  gilt also  $c = \nu\lambda$ .

Im Vakuum nehmen die MAXWELL-Gleichungen für die Potentiale unter der LORENTZ-Eichung

$$\frac{1}{c} \partial_t \phi + \text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (6)$$

die Form

$$\square \mathbf{A} = 0 \quad (7)$$

$$\square \phi = 0 \quad (8)$$

an, es handelt sich also um Wellengleichungen. Wir bemerken noch einmal — wie am Ende des vorigen Kapitels —, daß noch eine eingeschränkte Eichfreiheit besteht, nämlich die Eichtransformation

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A} + \text{grad } \Lambda \\ \phi &\rightarrow \phi - \frac{1}{c} \partial_t \Lambda, \end{aligned}$$

wobei jedoch  $\Lambda$  eine Lösung der homogenen Wellengleichung, also  $\square \Lambda = 0$  sein muß.

Jetzt wollen wir die Wellengleichungen (7) und (8) lösen; dazu setzen wir ebene Wellen an, es sei also

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 e^{i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{A}_0 e^{i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})} \end{aligned} \quad (9)$$

mit  $\omega = ck$ . Die LORENTZ-Eichung (6) fordert

$$\frac{1}{c} \partial_t \phi + \text{div } \mathbf{A} = \left( \frac{i}{c} \omega \phi_0 + i \mathbf{k} \mathbf{A}_0 \right) e^{i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})} \stackrel{!}{=} 0,$$

also

$$\phi_0 = -\frac{\mathbf{k}}{k} \mathbf{A}_0. \quad (10)$$

Damit können wir nur noch die drei Amplituden des Vektorpotentials  $\mathbf{A}_0$  frei wählen —  $\phi_0$  folgt dann mittels (10).

Aus den Potentialen (9) berechnen wir jetzt die Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$ . Mit  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$  wird

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \text{rot} \left( \mathbf{A}_0 e^{i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})} \right) \\ &= e^{i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})} \text{rot } \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_0 \times \text{grad } e^{i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})} \\ &= -\mathbf{A}_0 \times i \mathbf{k} e^{i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})} \\ \mathbf{H} &= i \mathbf{k} \times \mathbf{A}_0 e^{i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})}. \end{aligned} \quad (11)$$

(Also ist für ebene Wellen  $\text{rot} \equiv i \mathbf{k} \times \cdot$ .) Nun zu  $\mathbf{E}$ . Mit  $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} - \text{grad } \phi$  folgt

$$\mathbf{E} = \left( -\frac{1}{c} i \omega \mathbf{A}_0 - i \mathbf{k} \phi_0 \right) e^{i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})}. \quad (12)$$

Daraus ersieht man, daß  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  senkrecht stehen, denn  $\mathbf{E}$  ist eine Linearkombination von  $\mathbf{A}_0$  und  $\mathbf{k}$ ; wegen dem Vektorprodukt steht  $\mathbf{H}$  aber senkrecht auf  $\mathbf{A}_0$  und  $\mathbf{k}$ , also auch auf  $\mathbf{E}$ .

Multipliziert man  $\mathbf{E}$  mit  $\mathbf{k}$  und setzt (10) in (12), so erhält man

$$\mathbf{k} \mathbf{E} = \left( -\mathbf{k} \frac{1}{c} i \omega \mathbf{A}_0 + i k^2 \frac{\mathbf{k}}{k} \mathbf{A}_0 \right) e^{i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})} = 0,$$

d.h. es steht  $\mathbf{E}$  senkrecht auf  $\mathbf{k}$ . Insgesamt stehen also die drei Größen  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{k}$  jeweils senkrecht aufeinander. Bei festem  $\mathbf{k}$  bleibt für die Wahl von  $\mathbf{E}$  bzw.  $\mathbf{H}$  nur noch eine Ebene. Dies sind die 2 möglichen Polarisierungen. Wie im Absatz vor dem Ansatz (9) erwähnt, bleibt noch die Eichfreiheit mit  $\square \Lambda = 0$ . Dies nutzen wir jetzt aus. Mit  $\Lambda = l e^{i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})}$  — dies ist natürlich eine Lösung der homogenen Wellengleichung — ist  $\text{grad } \Lambda = i \mathbf{k} \Lambda$ . Zu  $\mathbf{A}_0$  kann also ein beliebiger Vektor in Richtung von  $\mathbf{k}$  zuaddiert werden, ohne daß dadurch  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  beeinflusst werden. Wir wählen diesen Vektor so, daß  $\mathbf{k} \mathbf{A}_0 = 0$  wird, d.h. daß  $\mathbf{A}_0$  senkrecht auf  $\mathbf{k}$  steht. Dann verschwindet das Potential  $\phi_0$ , womit  $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A}$  gilt.

Zusammengefaßt hatten wir also folgenden Gedankengang: Am Anfang standen  $\phi_0$  und  $\mathbf{A}_0$  als beliebig wählbar. Die LORENTZ-Eichung hat dann die Abhängigkeit des Potentials  $\phi_0$  von  $\mathbf{A}_0$  impliziert. Damit waren nur noch 3 der 4 Komponenten der Potentiale frei wählbar. Die eingeschränkte Eichfreiheit mit  $\square\Lambda = 0$  erlaubte auch noch, die Komponente von  $\mathbf{A}_0$  in Richtung von  $\mathbf{k}$  verschwinden zu lassen. Damit blieben nur noch 2 frei wählbare Komponenten übrig. Dies sind die 2 Polarisationsmöglichkeiten.

Wir geben uns nun eine Differentialgleichung der Form (1) vor, und versuchen, sie allgemein zu lösen. Dazu setzen wir eine Überlagerung von ebenen harmonischen Wellen  $a(\mathbf{k})e^{i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})} + b(\mathbf{k})e^{-i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})}$  mit komplexen  $a(\mathbf{k})$ ,  $b(\mathbf{k})$  mit allen  $\mathbf{k}$  an, d.h.

$$f(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (a(\mathbf{k})e^{i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})} + b(\mathbf{k})e^{-i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})}) d^3k. \quad (13)$$

Dabei ist der Faktor  $1/(2\pi)^{3/2}$  zunächst ohne Bedeutung. Wie man nun leicht nachprüft, ist (13) eine Lösung von (1). Wir wollen jedoch eine reelle Lösung, fordern also  $f(t, \mathbf{x}) \stackrel{!}{=} f^*(t, \mathbf{x})$ . Wegen

$$f^*(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (a^*(\mathbf{k})e^{-i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})} + b^*(\mathbf{k})e^{i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})}) d^3k$$

zieht dies die Forderung

$$a(\mathbf{k}) = b^*(\mathbf{k}) \quad (14)$$

nach sich. Damit wird

$$f(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (a(\mathbf{k})e^{i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})} + a^*(\mathbf{k})e^{-i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})}) d^3k. \quad (15)$$

Jetzt versuchen wir, für die Randwerte

$$f(0, \mathbf{x}), \quad \dot{f}(0, \mathbf{x}) \equiv \partial_t f(t, \mathbf{x})|_{t=0}$$

eine Lösung zu finden. Es gilt: Die Lösung von (1) ist durch diese Randwerte eindeutig bestimmt. Es handelt sich um ein CAUCHY-Problem.

Dies haben wir nun zu beweisen. Zunächst folgt aus (15)

$$\begin{aligned} f(0, \mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (a(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + a^*(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}) d^3k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (a(\mathbf{k}) + a^*(-\mathbf{k}))e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3k, \end{aligned} \quad (16)$$

wir können also  $a(\mathbf{k}) + a^*(-\mathbf{k})$  — da wegen (16)  $f(0, \mathbf{x})$  FOURIER-Transformierte von  $a(\mathbf{k}) + a^*(-\mathbf{k})$  ist — mittels FOURIER-Transformation aus  $f(0, \mathbf{x})$  gewinnen.

Ebenso folgt aus (15)

$$\begin{aligned} \dot{f}(0, \mathbf{x}) &= \partial_t f(t, \mathbf{x})|_{t=0} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left( i\omega a(\mathbf{k})e^{i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})} - i\omega a^*(\mathbf{k})e^{-i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})} \right) d^3k \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int i\omega (a(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} - a^*(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}) d^3k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int i\omega (a(\mathbf{k}) - a^*(-\mathbf{k})) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3k, \end{aligned} \quad (17)$$

d.h. aus (17) erhalten wir durch FOURIER-Transformation die Funktion  $a(\mathbf{k}) - a^*(-\mathbf{k})$ , insgesamt also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a(\mathbf{k}) + a^*(-\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(0, \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3x \\ a(\mathbf{k}) - a^*(-\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{i\omega} \dot{f}(0, \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3x, \end{aligned} \quad (18)$$

woraus man durch Auflösen explizite Formeln für  $a$  und  $a^*$  erhält:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2 \cdot (2\pi)^{3/2}} \int \left( f(0, \mathbf{x}) + \frac{1}{i\omega} \dot{f}(0, \mathbf{x}) \right) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3x \\ a^*(-\mathbf{k}) &= \frac{1}{2 \cdot (2\pi)^{3/2}} \int \left( f(0, \mathbf{x}) - \frac{1}{i\omega} \dot{f}(0, \mathbf{x}) \right) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3x. \end{aligned} \quad (19)$$

Diese Funktionen  $a(\mathbf{k})$  und  $a^*(-\mathbf{k})$  aus (19) setzt man nun in (15), was schließlich — nach Umbenennung von  $\mathbf{x}$  in  $\mathbf{y}$  in (19) — auf

$$\begin{aligned} f(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{2 \cdot (2\pi)^3} \int \left( \int \left( f(0, \mathbf{y}) + \frac{1}{i\omega} \dot{f}(0, \mathbf{y}) \right) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{y}} d^3y e^{i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})} \right. \\ &\quad \left. + \int \left( f(0, \mathbf{y}) - \frac{1}{i\omega} \dot{f}(0, \mathbf{y}) \right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{y}} d^3y e^{-i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})} \right) d^3k \\ &= \frac{1}{2 \cdot (2\pi)^3} \int \int \left( f(0, \mathbf{y}) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \right. \\ &\quad \left. + \dot{f}(0, \mathbf{y}) \frac{1}{i\omega} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \right) d^3y d^3k. \end{aligned} \quad (20)$$

Um diesen Ausdruck einfacher zu schreiben, führen wir den *Propagator* — zu Deutsch etwa “Wellenausbreitungsterm” —

$$D(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) := \frac{1}{2 \cdot (2\pi)^3} \int \frac{1}{i\omega} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) d^3k \quad (21)$$

ein. Differenziert man diesen, so erhält man

$$\dot{D}(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) := \frac{1}{2 \cdot (2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) d^3k \quad (22)$$

Damit schreibt sich (20) kürzer in der Form

$$f(t, \mathbf{x}) = \int \left( f(0, \mathbf{y}) \dot{D}(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) + \dot{f}(0, \mathbf{y}) D(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) d^3y. \quad (23)$$

Dies stellt die Lösung des CAUCHY-Problemes

$$\square f(t, \mathbf{x}) = 0; \quad f(0, \mathbf{y}), \dot{f}(0, \mathbf{y}) \quad \text{vorgegeben} \quad (24)$$

dar. Leicht sieht man

$$\begin{aligned} D(0, \mathbf{x}) &= 0 \\ \text{und} \quad \dot{D}(0, \mathbf{x}) &= \delta(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Gibt man für eine Welle  $\tilde{f}$  die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \tilde{f}(0, \mathbf{x}) &= 0 \\ \text{und} \quad \dot{\tilde{f}}(0, \mathbf{x}) &= \delta(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

vor, so erhält man mit (23) als dazugehörige Welle  $\tilde{f}$  den Propagator. Damit ist gezeigt, daß

$$\square D(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (25)$$

Nach der Lösung des Randwertproblems (24) wollen wir jetzt die inhomogene Wellengleichung

$$\square f(t, \mathbf{x}) = h(t, \mathbf{x}) \quad (26)$$

lösen. Wie schon im 2. Kapitel geschehen, definieren wir dazu die GREENSche Funktion durch

$$\square G(t, \mathbf{x}) = \delta(t)\delta(\mathbf{x}), \quad (27)$$

wobei uns dann in

$$f(t, \mathbf{x}) = \int G(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}') h(t', \mathbf{x}') dt' d\mathbf{x}' \quad (28)$$

eine spezielle Lösung von (26) gegeben ist, denn

$$\begin{aligned} \square f(t, \mathbf{x}) &= \int \square G(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}') h(t', \mathbf{x}') dt' d^3x' \\ &= \int \delta(t - t') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') h(t', \mathbf{x}') dt' d\mathbf{x}' \\ &= h(t, \mathbf{x}), \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Wir behaupten nun, daß

$$G_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}) = c^2 \Theta(t) D(t, \mathbf{x}) \quad (29)$$

eine GREENSche Funktion — die sogenannte *retardierte GREENSche Funktion* — ist. Dabei ist  $\Theta(x)$  die wohlbekannte Stufenfunktion

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Um dies zu beweisen, ist für  $G_{\text{ret}}$  die Bedingung (27) zu zeigen.

Zunächst ist  $\partial_t G_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}) = c^2 \delta(t) D(t, \mathbf{x}) + c^2 \Theta(t) \dot{D}(t, \mathbf{x})$ , was unter dem Integral dasselbe wie  $c^2 D(0, \mathbf{x}) + c^2 \Theta(t) \dot{D}(t, \mathbf{x})$  ist, weiterhin gilt  $\partial_t^2 G_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}) = c^2 \delta(t) \dot{D}(t, \mathbf{x}) + c^2 \Theta(t) \ddot{D}(t, \mathbf{x})$ , also  $= c^2 \delta(t) \delta(\mathbf{x}) + c^2 \Theta(t) \ddot{D}(t, \mathbf{x})$ . Damit gilt  $\square G_{\text{ret}} = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 G_{\text{ret}} - \Delta G_{\text{ret}} = \delta(t) \delta(\mathbf{x}) + \Theta(t) (\ddot{D} - c^2 \Delta D) = \delta(t) \delta(\mathbf{x})$ , denn  $\ddot{D} - c^2 \Delta D = 0$ , da — wie schon bemerkt —  $D$  eine Lösung der homogenen Wellengleichung ist. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Man kann nun analog zeigen, daß die sogenannte *avancierte GREENSche Funktion*

$$G_{\text{adv}}(t, \mathbf{x}) = -c^2 \Theta(-t) D(t, \mathbf{x}) \quad (30)$$

ebenso eine Lösung von (27) ist. Damit haben wir

$$D(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{c^2} (G_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}) - G_{\text{adv}}(t, \mathbf{x})).$$

Um überhaupt einen Nutzen aus diesen Überlegungen zu ziehen, haben wir jetzt  $D$  (und  $G_{\text{ret}}$ ) explizit zu berechnen, d.h. es ist die Integration in (21) auszuführen.

Es war

$$D(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) := \frac{1}{2 \cdot (2\pi)^3} \int \frac{1}{i\omega} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) d^3k, \quad (21)$$

was sich nach Einführung von Kugelkoordinaten (so, daß  $\mathbf{k}\mathbf{x} = kx \sin \vartheta$ ) vereinfacht. Man erhält

$$\begin{aligned} D(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{2 \cdot (2\pi)^3} \int \frac{1}{ick} e^{ikx \sin \vartheta} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) k^2 \cos \vartheta d\phi d\vartheta dk \\ &= \frac{2\pi}{2 \cdot (2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{k^2}{ick \cdot ikx} |e^{ikx \sin \vartheta}|_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) dk \\ &= -\frac{1}{2 \cdot (2\pi)^2 cx} \int_0^\infty (e^{ikx} - e^{-ikx}) (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) dk \\ &= -\frac{1}{8\pi^2 cx} \int_0^\infty \left[ (e^{ik(x+ct)} + e^{-ik(x+ct)}) - (e^{ik(x-ct)} + e^{-ik(x-ct)}) \right] dk \\ &= -\frac{1}{8\pi^2 cx} \int_{-\infty}^\infty (e^{ik(x+ct)} - e^{ik(x-ct)}) dk \\ &= -\frac{1}{4\pi cx} (\delta(|\mathbf{x}| + ct) - \delta(|\mathbf{x}| - ct)), \end{aligned}$$

der Propagator der Wellengleichung (26) lautet also

$$D(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi c^2 |\mathbf{x}|} \left( \delta\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c}\right) - \delta\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c}\right) \right). \quad (31)$$

Aufgrund der Definition (29) der retardierten GREENSchen Funktion ist

$$G_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}) = c^2 \Theta(t) D(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x}|} \delta\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c}\right), \quad (32)$$

womit eine Lösung von (26) wegen (28) also durch

$$f(t, \mathbf{x}) = \int \int_{-\infty}^t \frac{\delta\left(t' - t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} h(\mathbf{x}', t') dt' d^3 x' \quad (33)$$

dargestellt werden kann. Da  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \geq 0$ , genügt es, die Zeitintegration bis  $t$  gehen zu lassen. Für  $t' > t$ , also in der Zukunft, wird  $h$  auch i.A. nicht bekannt sein. Erst die retardierte GREENSche Funktion erlaubt also, aus in der Vergangenheit bekanntem  $h$  auf  $f$  zu schließen.

Die Zeitintegration in (33) kann außerdem noch ausgeführt werden. Die  $\delta$ -Funktion wird genau dann singulär, falls  $t' = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}$ , man erhält also

$$f(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{h(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x', \quad (34)$$

womit wir dieses Kapitel beschließen wollen.

## 11. Energie und Impuls elektromagnetischer Wellen

Im Kapitel 8 haben wir uns Überlegungen zur Energie des elektromagnetischen Feldes gemacht, welche uns auf die Gleichung 8(5) für die Energiedichte, also auf

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) d^3 x \quad (1)$$

führten. Diesen Ausdruck wollen nun für den Spezialfall elektromagnetischer Wellen berechnen. Dabei gehen wir von der Form 10(15), der Gleichung

$$f(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (b(\mathbf{k}) e^{i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})} + b^*(\mathbf{k}) e^{-i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})}) d^3 k \quad (2)$$

aus, berechnen also  $\int f^2 d^3 x$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int f^2 d^3 x &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (b(\mathbf{k}) b(\mathbf{p}) e^{i((\omega_k + \omega_p)t + (\mathbf{k} + \mathbf{p})\mathbf{x})} \\ &\quad + b(\mathbf{k}) b^*(\mathbf{p}) e^{i((\omega_k - \omega_p)t + (\mathbf{k} - \mathbf{p})\mathbf{x})} \\ &\quad + b^*(\mathbf{k}) b(\mathbf{p}) e^{i((-\omega_k + \omega_p)t + (-\mathbf{k} + \mathbf{p})\mathbf{x})} \\ &\quad + b^*(\mathbf{k}) b^*(\mathbf{p}) e^{-i((\omega_k + \omega_p)t + (\mathbf{k} + \mathbf{p})\mathbf{x})}) d^3 k d^3 p d^3 x, \end{aligned}$$

was sich wegen

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\mathbf{p} - \mathbf{k})\mathbf{x}} d^3 x = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k})$$

zu

$$\begin{aligned} \int f^2 d^3x &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (b(\mathbf{k})b(\mathbf{p})e^{i(\omega_k+\omega_p)t}\delta(\mathbf{k}+\mathbf{p}) \\ &\quad + b(\mathbf{k})b^*(\mathbf{p})e^{i(\omega_k-\omega_p)t}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \\ &\quad + b^*(\mathbf{k})b(\mathbf{p})e^{i(-\omega_k+\omega_p)t}\delta(-\mathbf{k}+\mathbf{p}) \\ &\quad + b^*(\mathbf{k})b^*(\mathbf{p})e^{-i(\omega_k+\omega_p)t}\delta(\mathbf{k}+\mathbf{p}) ) d^3k d^3p, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \int f^2 d^3x &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (b(\mathbf{k})b(-\mathbf{k})e^{2i\omega_k t} + b(\mathbf{k})b^*(\mathbf{k}) \\ &\quad + b^*(\mathbf{k})b(\mathbf{k}) + b^*(\mathbf{k})b^*(-\mathbf{k})e^{-2i\omega_k t} ) d^3k \end{aligned} \quad (3)$$

vereinfacht.

Unter Zuhilfenahme dieses Teilergebnisses berechnen wir nun  $\int \mathbf{E}^2 d^3x$  und  $\int \mathbf{H}^2 d^3x$ .

Dazu setzen wir für das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (\mathbf{a}(\mathbf{k})e^{i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})} + \mathbf{a}^*(\mathbf{k})e^{-i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{x})}) d^3k \quad (4)$$

( $\mathbf{a}$  vektorwertige Funktion mit komplexen Komponenten) an. Wie in Kapitel 10 gezeigt wurde, können wir — mit Hilfe der bei gewählter LORENTZ-Eichung noch bestehenden Eichfreiheit mit  $\square\Lambda = 0$  — das skalare Potential  $\phi$  zu  $\phi = 0$  eichen, dann ist darüberhinaus auch noch  $\mathbf{ka}(\mathbf{k}) = 0$ . Stellen wir  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  in der Form (2) dar, so wird  $b(\mathbf{k}) = -\frac{1}{c}i\omega\mathbf{a}(\mathbf{k})$  für das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  bzw.  $b(\mathbf{k}) = i\mathbf{k} \times \mathbf{a}(\mathbf{k})$  für das magnetische Feld  $\mathbf{H}$ . Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi} \left( \int \mathbf{E}^2 d^3x + \int \mathbf{H}^2 d^3x \right) \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \left[ \left( -\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{a}(\mathbf{k})\mathbf{a}(-\mathbf{k}) - (\mathbf{k} \times \mathbf{a}(\mathbf{k}))((-\mathbf{k}) \times \mathbf{a}(-\mathbf{k})) \right) e^{2i\omega_k t} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left( \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{a}(\mathbf{k})\mathbf{a}^*(\mathbf{k}) + (\mathbf{k} \times \mathbf{a}(\mathbf{k}))(\mathbf{k} \times \mathbf{a}^*(\mathbf{k})) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{a}^*(\mathbf{k})\mathbf{a}^*(-\mathbf{k}) - (\mathbf{k} \times \mathbf{a}^*(\mathbf{k}))((-\mathbf{k}) \times \mathbf{a}^*(-\mathbf{k})) \right) e^{-2i\omega_k t} \right] d^3k \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \left[ \left( -\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{a}(\mathbf{k})\mathbf{a}(-\mathbf{k}) + \mathbf{k}^2 \mathbf{a}(\mathbf{k})\mathbf{a}(-\mathbf{k}) - (\mathbf{ka}(-\mathbf{k}))(\mathbf{ka}(\mathbf{k})) \right) e^{2i\omega_k t} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left( \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{a}(\mathbf{k})\mathbf{a}^*(\mathbf{k}) + \mathbf{k}^2 \mathbf{a}(\mathbf{k})\mathbf{a}^*(\mathbf{k}) - (\mathbf{ka}(\mathbf{k}))(\mathbf{ka}^*(\mathbf{k})) \right) \right] d^3k, \end{aligned}$$

also

$$W = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\omega_k^2}{c^2} \mathbf{a}(\mathbf{k})\mathbf{a}^*(\mathbf{k}) d^3k. \quad (4)$$

Dieser Ausdruck stellt die Energie der Welle dar.

Jetzt beschäftigen wir uns mit dem Impuls des elektromagnetischen Feldes. Die *Impulsdichte*  $\mathbf{p}_{\text{Feld}}$  des Feldes setzen wir in der Form

$$\mathbf{p}_{\text{Feld}} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (5)$$

an und berechnen davon die zeitliche Änderung. Es ist

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{p}_{\text{Feld}} &= \frac{1}{4\pi c} ((\partial_t \mathbf{E}) \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \partial_t \mathbf{H}) \\ &= \frac{1}{4\pi} (\text{rot } \mathbf{H} \times \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} - \mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{E}). \end{aligned} \quad (6)$$

Mit

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E})_i &= \varepsilon_{ijk} \mathbf{E}_j (\operatorname{rot} \mathbf{E})_k \\
&= \varepsilon_{ijk} \mathbf{E}_j \varepsilon_{klm} \partial_l \mathbf{E}_m \\
&= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \mathbf{E}_j \partial_l \mathbf{E}_m \\
&= \mathbf{E}_j \partial_i \mathbf{E}_j - \mathbf{E}_j \partial_j \mathbf{E}_i,
\end{aligned}$$

was wegen  $\partial_j(\mathbf{E}_j \mathbf{E}_i) = \mathbf{E}_i \partial_j \mathbf{E}_j + \mathbf{E}_j \partial_j \mathbf{E}_i = \mathbf{E}_i \operatorname{div} \mathbf{E} + \mathbf{E}_j \partial_j \mathbf{E}_i$  zu

$$(\mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E})_i = \frac{1}{2} \partial_i \mathbf{E}^2 + \mathbf{E}_i \operatorname{div} \mathbf{E} - \partial_j(\mathbf{E}_j \mathbf{E}_i)$$

wird, berechnet sich (6) weiter zu

$$\partial_t \mathbf{p}_{\text{Feld}i} = -\frac{1}{4\pi} \left( -\frac{1}{2} \partial_i (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) + 4\pi \varrho \mathbf{E}_i + \partial_j(\mathbf{E}_j \mathbf{E}_i) + \partial_j(\mathbf{H}_j \mathbf{H}_i) - \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{H})_i \right).$$

Schließlich ist also

$$\partial_t \mathbf{p}_{\text{Feld}i} = \frac{1}{4\pi} \partial_j \left( -\frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) + \mathbf{E}_i \mathbf{E}_j + \mathbf{H}_i \mathbf{H}_j \right) - (\varrho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H})_i.$$

Schreibt man

$$T_{ij} := \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E}_i \mathbf{E}_j + \mathbf{H}_i \mathbf{H}_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)) \quad (7)$$

(MAXWELLScher Spannungstensor) und

$$\mathbf{K} = \varrho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} = \partial_t \mathbf{p}_{\text{mech}} \quad (8)$$

für die *Kraftdichte*, so erhält man

$$\partial_t (\mathbf{p}_{\text{Feld}} + \mathbf{p}_{\text{mech}})_i - \partial_j T_{ij} = 0. \quad (9)$$

Dies stellt einen Erhaltungssatz dar, denn  $\partial_j T_{ij}$  ist — für jedes feste  $i$  — eine Divergenz.

Logisch kann folgendermaßen argumentiert werden: Man macht für die Impulsdichte den Ansatz (5); er führt auf die Gleichung

$$\partial_t \mathbf{p}_{\text{Feld}i} + (\varrho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H})_i - \partial_j T_{ij} = 0. \quad (10)$$

Falls  $\mathbf{H} = 0$ , so stellt  $\mathbf{K} = \varrho \mathbf{E}$  die Kraftdichte dar, es liegt also nahe, im Falle  $\mathbf{H} \neq 0$  die Größe  $\mathbf{K} = \varrho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}$  als Kraftdichte anzunehmen. Experimentell kann diese Annahme bestätigt werden — insgesamt zeigt sich also die Richtigkeit von (5).

## 12. Der Tensorkalkül

Nachdem die MAXWELLSche Theorie jetzt dargestellt wurde, wollen wir uns jetzt mit Eigenschaften dieser Theorie unter bestimmten linearen Raumzeittransformationen vertraut machen. Das nötige Rüstzeug soll in diesem Kapitel vermittelt werden.

Zu diesem Zweck beschäftigen wir uns jetzt mit Transformationseigenschaften von Vektoren. Dazu geben wir uns einen  $n$ -dimensionalen Vektorraum mit der Basis  $\{\mathbf{b}_\mu\}$  vor. Außerdem sei  $\{\mathbf{b}'_\mu\}$  eine weitere Basis dieses Vektorraumes. Dann existiert genau eine Matrix  $\mathbf{A} = (A_\mu{}^\nu)$  mit  $\det \mathbf{A} \neq 0$ , sodaß

$$\mathbf{b}'_\mu = A_\mu{}^\nu \mathbf{b}_\nu. \quad (1)$$

Dabei ist  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$  eine umkehrbare lineare Abbildung auf dem besagten Vektorraum. Wir wollen solche Abbildungen *lineare Transformationen* nennen. In (1) und im Folgenden benutzen wir die EINSTEINSche Summenkonvention in folgender Form: Summiert wird nur über Indexpaare, wobei einer der Indizes oben, der korrespondierende jedoch unten auftreten muß. Die Anwendbarkeit dieser Konvention ist für uns zunächst der einzige Grund dafür, in (1) auch obere Indizes zu benutzen — und zwischen oberen und unteren Indizes einen Unterschied zu machen.

Ist  $A^{-1} = (A^{-1}{}_{\mu}{}^{\nu})$  die Inverse von  $A$ , so lautet die Umkehrung von (1)

$$\mathbf{b}_{\mu} = A^{-1}{}_{\mu}{}^{\nu} \mathbf{b}'_{\nu},$$

denn  $\mathbf{b}'_{\mu} = A_{\mu}{}^{\nu} \mathbf{b}_{\nu} = A_{\mu}{}^{\nu} A^{-1}{}_{\nu}{}^{\lambda} \mathbf{b}'_{\lambda} = \delta_{\mu}{}^{\lambda} \mathbf{b}'_{\lambda} = \mathbf{b}'_{\mu}$ , wobei  $(\delta_{\mu}{}^{\nu})$  die Einheitsmatrix bedeutet.

Wir betrachten nun einen beliebigen Vektor  $\mathbf{x}$ . Dieser besitzt in jeder der Basen eine eindeutige Koordinatendarstellung  $\{x^{\mu}\}$  bzw.  $\{x'^{\mu}\}$ , sodaß

$$\mathbf{x} = x^{\mu} \mathbf{b}_{\mu} = x'^{\mu} \mathbf{b}'_{\mu}. \quad (2)$$

Wenn wir nun die Transformation  $x^{\mu} \mapsto x'^{\mu}$  studieren, werden wir feststellen, daß sie in gewissem Sinne komplementär zu (1) sein muß, da  $\mathbf{x} = x^{\mu} \mathbf{b}_{\mu}$  invariant unter der Transformation der  $x^{\mu}$  und  $\mathbf{b}_{\mu}$  sein muß; kurz: Der Vektor  $\mathbf{x}$  darf nicht von der Basiswahl abhängen.

Aus der Forderung  $x^{\mu} \mathbf{b}_{\mu} = x'^{\mu} \mathbf{b}'_{\mu}$  können wir das Transformationsverhalten der  $x^{\mu}$  bei Basisstransformation erhalten: Es ist  $x^{\mu} \mathbf{b}_{\mu} = x'^{\mu} \mathbf{b}'_{\mu} = x'^{\mu} A_{\mu}{}^{\nu} \mathbf{b}_{\nu}$ , analog wird  $x'^{\mu} \mathbf{b}'_{\mu} = x^{\mu} \mathbf{b}_{\mu} = x^{\mu} A^{-1}{}_{\mu}{}^{\nu} \mathbf{b}'_{\nu}$ . Insgesamt ist also

$$x^{\nu} = A_{\mu}{}^{\nu} x'^{\mu} = A^{T\nu}{}_{\mu} x'^{\mu} \quad (3)$$

beziehungsweise

$$x'^{\nu} = A^{-1}{}_{\mu}{}^{\nu} x^{\mu} = A^{-1T\nu}{}_{\mu} x^{\mu}. \quad (4)$$

Wir führen an dieser Stelle die Abkürzung  $B := (A^{-1})^T$  mit welcher sich (4) und (5) in der Form

$$x'^{\mu} = B^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \quad (3)$$

resp.

$$x^{\mu} = B^{-1\mu}{}_{\nu} x'^{\nu} \quad (4)$$

schreiben lassen, ein.

Man erkennt also folgendes: Die Basisvektoren transformieren mit  $A$ , die Koordinaten mit  $A^{-1T}$ . Dies ist auch der Grund, weshalb an den Basisvektoren die Indizes unten, bei den Koordinaten jedoch oben stehen: Dadurch wird der Unterschied im Transformationsverhalten angedeutet. Oben indizierte Größen nennt man *kontravariant*, unten indizierte *kovariant*.

Im Folgenden werden wir eine Transformation nicht — wie oben — durch einen Basiswechsel, sondern durch die Transformationsformel (3) für die Koordinaten festlegen.

Wir fassen zusammen: Sei eine Transformation durch die Formel für die Transformation der Koordinaten, also durch

$$x'^{\mu} = B^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \quad (\mu, \nu = 1 \dots n) \quad (5)$$

gegeben. Dann heißen die  $n$  Größen  $\{A^{\mu}\}$  ein *kontravarianter* Vektor, falls bei obiger Koordinatentransformation die Größen  $A^{\mu}$  nach der Formel

$$A'^{\mu} = B^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}, \quad (6)$$

also wie die Koordinaten transformieren. Analog bilden  $n$  Größen  $\{A_{\mu}\}$  einen *kovarianten* Vektor, falls

$$A'_{\mu} = (B^T)^{-1}{}_{\mu}{}^{\nu} A_{\nu} \quad (7)$$

die Transformationseigenschaften beschreibt.

Diese Definitionen sind so gewählt, daß ein kovarianter Vektor  $A_{\mu}$  zusammen mit einem kontravarianten Vektor  $B^{\mu}$  einen Skalar (Skalar im engeren Sinne: muß unter Transformation invariant sein, d.h. darf seinen Wert nicht ändern)

$$s = A_{\mu} B^{\mu} \quad (8)$$

bilden kann. Man sieht dies durch Ausrechnen, denn

$$\begin{aligned} s' &= A'_\mu B'^\mu = \mathbf{B}^{T^{-1}}{}^\nu{}_\mu A_\nu \mathbf{B}^\mu{}_\lambda B^\lambda \\ &= \mathbf{B}^{-1}{}^\nu{}_\mu \mathbf{B}^\mu{}_\lambda A_\nu B^\lambda \\ &= \delta^\nu{}_\lambda A_\nu B^\lambda \\ &= A_\lambda B^\lambda = s, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Wir überlegen uns nun, welchen Transformationscharakter Differentialoperatoren zeigen. Die Transformation sei wieder durch (5) gegeben. Für die Differentiale  $dx^\mu$  gilt

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = \mathbf{B}^\mu{}_\nu dx^\nu, \quad (9)$$

d.h. Differentiale sind kontravariante Größen. Sie transformieren wie die Koordinaten.

Nun betrachten wir die Operatoren  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ . Offensichtlich ist

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (\mathbf{B}^{-1})^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (\mathbf{B}^{-1})^T{}^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad (10)$$

besagte Operatoren transformieren also wie Basisvektoren, es handelt sich um kovariante Größen, was der untere Index in der Abkürzung  $\partial_\nu := \frac{\partial}{\partial x^\nu}$  suggerieren soll.

Dieses Konzept können wir nun erweitern. Seien dazu  $A^\mu$ ,  $B^\nu$  kontravariante Vektoren, dann untersuchen wir das Transformationsverhalten der  $2^n$  Größen

$$T^{\mu\nu} := A^\mu B^\nu.$$

Es ist

$$\begin{aligned} T'^{\varrho\sigma} &= A'^\varrho B'^\sigma = \mathbf{B}^\varrho{}_\mu A^\mu \mathbf{B}^\sigma{}_\nu B^\nu \\ &= \mathbf{B}^\varrho{}_\mu \mathbf{B}^\sigma{}_\nu T^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Man nennt  $T^{\mu\nu}$  einen *kontravarianten Tensor 2. Stufe*. Wählen wir den 2. Vektor kovariant, so erhalten wir einen Tensor 2. Stufe vom gemischten Typ

$$T^\mu{}_\nu = A^\mu B_\nu.$$

Dieser transformiert nach

$$T'^{\varrho}{}_\sigma = \mathbf{B}^\varrho{}_\mu (\mathbf{B}^T)^{-1}{}^\sigma{}_\nu T^\mu{}_\nu.$$

In diesem Sinne können wir nun allgemein den Tensor definieren:  $n^{s+r}$  Größen  $T_{\mu_1 \dots \mu_r}{}^{\nu_1 \dots \nu_s}$  bilden einen *Tensor (s + r)-ter Stufe*, falls ihr Transformationsverhalten durch die Gleichung

$$T'{}^{\varrho_1 \dots \varrho_r}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} = (\mathbf{B}^{T^{-1}})^{\varrho_1}{}^{\mu_1} \dots (\mathbf{B}^{T^{-1}})_{\varrho_r}{}^{\mu_r} \mathbf{B}^{\sigma_1}{}_{\nu_1} \dots \mathbf{B}^{\sigma_s}{}_{\nu_s} T_{\mu_1 \dots \mu_r}{}^{\nu_1 \dots \nu_s} \quad (11)$$

beschrieben wird. Mit  $(s, r)$  bezeichnet man den Typ des Tensors.

Man sieht leicht ein, daß in dieser Definition die Definition der Vektoren als Spezialfall enthalten ist — man setzt lediglich  $s = 0$  und  $r = 1$  bzw.  $s = 1$  und  $r = 0$ . Ein Vektor ist also nichts anderes als ein Tensor 1. Stufe. Ein Tensor 0. Stufe, d.h. eine einzige Größe, die unter Transformationen invariant ist, heißt ein *Skalar*.

Tensoren gleicher Stufe und gleichen Typs kann man addieren. Man erhält wieder einen Tensor. Ein Beispiel: Seien  $A_\mu{}^{\nu\sigma}$  und  $B_\mu{}^{\nu\sigma}$  Tensoren. Dann ist auch  $C_\mu{}^{\nu\sigma} := A_\mu{}^{\nu\sigma} + B_\mu{}^{\nu\sigma}$  ein Tensor, da die Definitionsgleichung für Tensoren linear ist.

Auch Multiplikation ist möglich: Multipliziert man einen Tensor  $m$ -ter Stufe mit einem weiteren  $n$ -ter Stufe, so erhält man einen Tensor  $(m+n)$ -ter Stufe. Den Beweis wollen wir an folgenden Beispiel führen: Seien  $C^\lambda$  und  $D_\mu{}^\nu$  Tensoren. Dann ist auch

$$T^\lambda{}_\mu{}^\nu := C^\lambda D_\mu{}^\nu$$

ein Tensor, denn es gilt

$$\begin{aligned} T'^{\varrho}{}_{\sigma}{}^{\tau} &= C'^{\varrho} D'{}_{\sigma}{}^{\tau} \\ &= \mathbf{B}^{\varrho}{}_{\lambda} C^{\lambda} (\mathbf{B}^{T-1})_{\sigma}{}^{\mu} \mathbf{B}^{\tau}{}_{\nu} D_{\mu}{}^{\nu} \\ &= \mathbf{B}^{\varrho}{}_{\lambda} (\mathbf{B}^{T-1})_{\sigma}{}^{\mu} \mathbf{B}^{\tau}{}_{\nu} T^{\lambda}{}_{\mu}{}^{\nu}, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Tensoren niedrigerer Stufe erhält man durch *Verjüngung* (Spurbildung). Man setzt zwei Indizes gleich und summiert über diese. Folgendes soll wieder der Beweisprobe dienen. Ist  $T_{\mu\nu}{}^{\sigma}$  ein Tensor 3. Stufe, so ist

$$D_{\nu} := T_{\mu\nu}{}^{\mu}$$

ein Tensor 1. Stufe bzw. ein Vektor. Dies ist klar, denn

$$\begin{aligned} D'_{\sigma} &= T'{}_{\varrho\sigma}{}^{\varrho} = \mathbf{B}^{T-1}{}_{\varrho}{}^{\mu} \mathbf{B}^{T-1}{}_{\sigma}{}^{\nu} \mathbf{B}^{\varrho}{}_{\tau} T_{\mu\nu}{}^{\tau} \\ &= \mathbf{B}^{-1}{}_{\varrho}{}^{\mu} \mathbf{B}^{\varrho}{}_{\tau} \mathbf{B}^{T-1}{}_{\sigma}{}^{\nu} T_{\mu\nu}{}^{\tau} \\ &= \delta^{\mu}{}_{\tau} \mathbf{B}^{T-1}{}_{\sigma}{}^{\nu} T_{\mu\nu}{}^{\tau} \\ &= \mathbf{B}^{T-1}{}_{\sigma}{}^{\nu} T_{\mu\nu}{}^{\mu} = \mathbf{B}^{T-1}{}_{\sigma}{}^{\nu} D_{\nu}. \end{aligned}$$

Wir definieren nun noch, was wir unter Symmetrie von Tensoren verstehen wollen.

Ein Tensor  $T^{\lambda}{}_{\mu\nu}$  — der hier für einen beliebigen Tensor stehen soll — heißt *symmetrisch* (*antisymmetrisch*) bezüglich zweier Indizes  $\mu$  und  $\nu$ , falls

$$T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = T^{\lambda}{}_{\nu\mu} \quad (T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = -T^{\lambda}{}_{\nu\mu}).$$

Einen Sinn erhält diese Definition jedoch erst durch folgenden Sachverhalt: Die Symmetrieeigenschaften eines Tensors bleiben unter Transformationen erhalten.

Jetzt betrachten wir zwei spezielle Tensoren: Den KRONECKER-Tensor  $\delta_{\mu}{}^{\nu}$  und den LEVI-CIVITA-Tensor  $\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ .

Der KRONECKER-Tensor

$$\delta_{\mu}{}^{\nu} := \begin{cases} 1 & \text{falls } \mu = \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (12)$$

ist ein Tensor 2. Stufe, denn

$$(\mathbf{B}^{T-1})_{\varrho}{}^{\mu} \mathbf{B}^{\sigma}{}_{\nu} \delta_{\mu}{}^{\nu} = \mathbf{B}^{\sigma}{}_{\mu} (\mathbf{B}^{-1})^{\mu}{}_{\varrho} = \delta^{\sigma}{}_{\varrho} = \delta_{\varrho}{}^{\sigma}.$$

Der  $\varepsilon$ -Tensor oder das LEVI-CIVITA-Symbol  $\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$  ist ein Tensor  $k$ -ter Stufe. Er ist definiert durch

$$\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_k} := \begin{cases} +1 & \text{für gerade Permutationen } (\alpha_1 \dots \alpha_k) \\ -1 & \text{für ungerade Permutationen und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (13)$$

Mit der LEIBNIZ-Formel zur Berechnung der Determinante einer  $k \times k$ -Matrix  $\mathbf{A}$

$$\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \det \mathbf{A} = \varepsilon_{\beta_1 \dots \beta_k} \mathbf{A}_{\alpha_1}{}^{\beta_1} \dots \mathbf{A}_{\alpha_k}{}^{\beta_k} \quad (14)$$

ist

$$\varepsilon_{\beta_1 \dots \beta_k} (\mathbf{B}^{T-1})_{\alpha_1}{}^{\beta_1} \dots (\mathbf{B}^{T-1})_{\alpha_k}{}^{\beta_k} = \det(\mathbf{B}^{T-1}) \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_k}.$$

Läßt man bei den Transformationen (5) diejenigen mit  $\det \mathbf{B} = \pm 1$  zu, so ändert der  $\varepsilon$ -Tensor bei Transformationen mit  $\det \mathbf{B} = -1$  sein Vorzeichen, ist also streng genommen kein Tensor. Man spricht in diesem Falle von einem *Pseudotensor*. Unter Transformationen mit  $\det \mathbf{B} = 1$  ist (13) ein echter Tensor  $k$ -ter Stufe.

Um dem am Anfang des Kapitels erwähnten Vektorraum eine Metrik aufzuprägen, definieren wir nun das *Skalarprodukt* zweier Vektoren  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  durch

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &:= (x^{\mu} \mathbf{b}_{\mu})(y^{\nu} \mathbf{b}_{\nu}) \\ &= x^{\mu} y^{\nu} \mathbf{b}_{\mu} \cdot \mathbf{b}_{\nu}, \end{aligned} \quad (15)$$

was sich nach Einführung des *metrischen Tensors*

$$g_{\mu\nu} := \mathbf{b}_\mu \mathbf{b}_\nu \quad (16)$$

in der Form

$$\mathbf{xy} = x^\mu y^\nu g_{\mu\nu} \quad (17)$$

schreibt. Der metrische Tensor ist invertierbar, man setzt

$$(g^{\mu\nu}) := (g_{\mu\nu})^{-1}, \quad (18)$$

der Tensor  $g^{\mu\nu}$  ist also invers zum metrischen Tensor, es gilt

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu{}_\nu. \quad (19)$$

Hier nun ein Beispiel. Im 3-dimensionalen euklidischen Raum ist

$$\mathbf{xy} = \sum_i x^i y^i,$$

der metrische Tensor lautet also

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij}),$$

das Skalarprodukt damit

$$\mathbf{xy} = x^i y^j g_{ij}.$$

Wir interessieren uns nun für die Teilmenge der linearen Transformationen, die dieses Skalarprodukt invariant lassen, mit denen also  $\mathbf{x}'\mathbf{y}' = \mathbf{xy}$  für beliebige Vektoren gilt. Daraus erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'\mathbf{y}' - \mathbf{xy} &= x'^i y'^j \delta_{ij} - x^k y^l \delta_{kl} \\ &= \mathbf{B}^i{}_k x^k \mathbf{B}^j{}_l y^l \delta_{ij} - x^k y^l \delta_{kl} \\ &= (\mathbf{B}^i{}_k \mathbf{B}^j{}_l \delta_{ij} - \delta_{kl}) x^k y^l \stackrel{!}{=} 0, \end{aligned}$$

also die Forderung

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} = 1 \quad (20)$$

an die Transformationsmatrizen. Die Menge dieser Matrizen bildet zusammen mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe. Im 3-dimensionalen heißt diese Gruppe  $O(3)$ . Matrizen, die (20) erfüllen heißen *orthogonale* Matrizen. Die Elemente von  $O(3)$  sind Drehungen, Spiegelungen und Kombinationen daraus.

Bei der Definition der Tensoren im 3-dimensionalen euklidischen Raum schränkt man jetzt die Menge der zugelassenen Transformationen auf die Gruppe  $O(3)$  ein — der “größten” Transformationsgruppe, unter der  $g_{ij}$  ein Tensor ist, anders ausgedrückt: Unter der das Skalarprodukt eine Invariante darstellt. Das Skalarprodukt — oder der metrische Tensor — legt damit eine Transformationsgruppe fest. Diese Gruppe wiederum dient zur Definition von Tensoren. Da der metrische Tensor damit stets ein echter Tensor ist, wird

$$x_i = g_{ij} x^j \quad (21)$$

ein kovarianter Vektor. Mit dem metrischen Tensor können also kovariante Größen in kontravariante — und umgekehrt — umgewandelt werden.

### 13. LORENTZ-Transformationen

Wir sind jetzt gerüstet, zu untersuchen, welche linearen Transformationen die MAXWELL-Gleichungen forminvariant lassen.

Aus den MAXWELL-Gleichungen lassen sich Gleichungen der Form

$$\square f = 0, \quad (1)$$

Wellengleichungen herleiten.  $f$  ist eine Funktion der vierdimensionalen Raumzeit  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  mit  $x^0 := ct$ . Wir postulieren nun, daß in jedem Inertialsystem die MAXWELL-Gleichungen gleichermaßen gelten, oder, anders ausgedrückt, daß sich mittels elektromagnetischer Erscheinungen kein Inertialsystem vor einem anderen auszeichnen läßt. Gilt die Wellengleichung für ein Feld in einem Inertialsystem  $S$ , so auch in einem dazu gleichförmig und geradlinig bewegten Bezugssystem, einem weiteren Inertialsystem  $S'$ . In  $S'$  gilt dann

$$\square' f' = 0.$$

Ist  $f$  ein skalares Feld, so ist  $f' = f$ . Offenbar müssen wir also fordern, daß die Transformation den Quabla-Operator invariant läßt, d.h., daß

$$\square = \square' \quad (2)$$

gelten muß. Schreibt man  $x^0 \equiv ct$ , so lautet der Quabla-Operator

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{12}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{22}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{32}},$$

was mit der (inversen) Metrik

$$(\eta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

in der Form

$$\square = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \eta^{\mu\nu} \quad (4)$$

geschrieben werden kann.

Wir wollen die Menge der Transformationen, die den Quabla-Operator forminvariant lassen, LORENTZ-Transformationen nennen. Mit der Matrix  $(\Lambda^\mu{}_\nu)$  (das "Lambda" soll an "LORENTZ" erinnern) lauten sie

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu. \quad (5)$$

Um diese Matrix zu bestimmen, haben wir

$$\begin{aligned} \square' &\equiv \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \eta^{\mu\nu} \\ &= \Lambda^{-1}{}^\rho{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\rho} \Lambda^{-1}{}^\sigma{}_\nu \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \eta^{\mu\nu} \\ &\stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \eta^{\rho\sigma} \equiv \square \end{aligned}$$

zu fordern. Dies liefert

$$\eta^{\rho\sigma} = \Lambda^{-1}{}^\rho{}_\mu \Lambda^{-1}{}^\sigma{}_\nu \eta^{\mu\nu},$$

was durch Multiplikation von links mit  $\Lambda^\alpha{}_\rho \Lambda^\beta{}_\sigma$  (und natürlich Summation über  $\rho$  und  $\sigma$ ) zu

$$\begin{aligned} \Lambda^\alpha{}_\rho \Lambda^\beta{}_\sigma \eta^{\rho\sigma} &= \Lambda^\alpha{}_\rho \Lambda^{-1}{}^\rho{}_\mu \Lambda^\beta{}_\sigma \Lambda^{-1}{}^\sigma{}_\nu \eta^{\mu\nu} \\ &= \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta \eta^{\mu\nu} \\ &= \eta^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

wird. Schreibt man dies mit Matrizen  $\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu)$  und  $\eta = (\eta^{\mu\nu})$ , so erhält man die Definitionsgleichung der LORENTZ-Transformationen

$$\Lambda\eta\Lambda^T = \eta. \quad (6)$$

Alle Matrizen, die diese Gleichung erfüllen, sind damit Transformationsmatrizen von LORENTZ-Transformationen.

Daraus ziehen wir nun einige Folgerungen. Zunächst ist  $\det(\Lambda\eta\Lambda^T) = \det\Lambda \det\eta \det\Lambda^T = \det\eta \det^2\Lambda \stackrel{!}{=} \det\eta$ , also  $\det^2\Lambda = 1$  oder

$$\det\Lambda = \pm 1. \quad (7)$$

Die Transformationsdeterminante zerlegt die Menge aller LORENTZ-Transformationen also in 2 Klassen: Ist  $\det\Lambda = +1$ , so spricht man von *eigentlichen* LORENTZ-Transformationen, deren Gesamtheit man mit  $L_+$  bezeichnet. Bei den *uneigentlichen* LORENTZ-Transformationen  $L_-$  ist  $\det\Lambda = -1$ .

Mittels der 0-0-Komponente der Transformationsmatrix zerlegt man weiter: Wegen (6) gilt

$$\Lambda^T{}_{0\mu}\eta^{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_0 = \eta_{00}$$

oder

$$\Lambda^T{}_{00}\Lambda^0{}_0 - \sum_i \Lambda^T{}_{0i}\Lambda^i{}_0 = 1,$$

also

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_i (\Lambda^i{}_0)^2, \quad (8)$$

d.h. es ist stets  $|\Lambda^0{}_0| \geq 1$ . Man bezeichnet die LORENTZ-Transformationen mit  $\Lambda^0{}_0 \geq +1$  als *ortochron*, da sie die Zeitrichtung ungeändert lassen.  $L^\uparrow$  ist die Gesamtheit dieser;  $L^\downarrow$  die Menge der LORENTZ-Transformationen mit  $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ . Die wichtigsten LORENTZ-Transformationen sind aus

$$L^\uparrow_+ = \{\Lambda \in L : \det\Lambda = +1 \wedge \Lambda^0{}_0 \geq +1\}, \quad (9)$$

die sogenannten *eigentlichen ortochronen* LORENTZ-Transformationen.

Wir wollen zeigen, daß  $L$  eine Gruppe ist. Zunächst ist  $L$  bzgl. der Multiplikation abgeschlossen, da mit  $\Lambda^{(1)}$  und  $\Lambda^{(2)}$  auch  $\Lambda^{(3)} := \Lambda^{(1)}\Lambda^{(2)}$  Gleichung (6) erfüllt. Die Multiplikation ist assoziativ,  $I_4$  ist Eins; mit  $\Lambda$  ist auch  $\Lambda^{-1}$  aus  $L$ , denn  $\det\Lambda \neq 0$  und  $\Lambda^{-1} \in L$ , da (6) äquivalent zu  $\eta = \Lambda^{-1}\eta(\Lambda^{-1})^T$  ist.

Wichtige Untergruppen von  $L$  sind — dies sei nur bemerkt, nicht aber bewiesen — die eigentlichen ortochronen LORENTZ-Transformationen sowie die Raumdrehungen

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

mit  $R \in O(3)$ .

Eine Teilmenge von  $L^\uparrow_+$  läßt sich — mit dem Parameter  $v$  — in der Form

$$\Lambda(v) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

mit  $\beta = v/c$  und  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$  darstellen. Es handelt sich bei der Transformation um einen Bezugssystemwechsel von einem Inertialsystem  $S$  in das bezüglich diesem System mit der Geschwindigkeit

$v$  in  $x$ -Richtung gleichförmig und geradlinig bewegte inertielle Bezugssystem  $S'$ . Konkret haben die Transformationsgleichungen also die Gestalt

$$\begin{aligned}x'^0 &= \frac{x^0 - \frac{v}{c}x^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\x'^1 &= \frac{x^1 - \frac{v}{c}x^0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\x'^2 &= x^2 \\x'^3 &= x^3.\end{aligned}\tag{11}$$

Um zu beweisen, daß dies eine LORENTZ-Transformation ist, hat man nur  $\Lambda\eta\Lambda^T = \eta$  nachzuprüfen.

Wir untersuchen nun den Grenzfall  $c \rightarrow \infty$ . Dann gehen die obigen Gleichungen mit  $x^0 \equiv ct$  in

$$\begin{aligned}t' &= t \\x'^1 &= x^1 - vt\end{aligned}\tag{12}$$

über. Dies ist die aus der nicht-relativistischen Mechanik bekannte GALILEI-Transformation.

## 14. Elektrodynamik in kovarianter Form

Zu diesem Kapitel zunächst einige einführende Bemerkungen. Eines der Grundpostulate der speziellen Relativitätstheorie, das Relativitätsprinzip besagt, daß alle Inertialsysteme gleichberechtigte Beobachterstandpunkte sind, daß in allen dieselben Naturgesetze gelten. Anders ausgedrückt heißt dies, daß die Naturgesetze keines der Inertialsysteme vor einem anderen auszeichnen. Die Transformation von einem inertialen Bezugssystem in ein anderes bewerkstelligen wir mit einer LORENTZ-Transformation. Das Relativitätsprinzip fordert also, daß Naturgesetze unter LORENTZ-Transformationen ihre Form beibehalten. Man spricht von *Forminvarianz* oder *Kovarianz* von Gleichungen bezüglich der LORENTZ-Transformationen. Die MAXWELL-Gleichungen sind forminvariant unter LORENTZ-Transformationen, sie zeichnen keines der zulässigen Beobachterstandpunkte vor einem anderen solchen aus. Dies ist klar, wenn die MAXWELL-Gleichungen in Form von Tensorgleichungen dargestellt werden können — womit wir auch schon das Programm für dieses Kapitel hätten.

Wir schreiben also die Gleichungen der Elektrodynamik im Vakuum

$$\begin{aligned}\square\phi &= 0 \\ \square A^i &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

in der LORENTZ-Eichung

$$\frac{1}{c}\partial_t\phi + \operatorname{div}\mathbf{A} = 0\tag{2}$$

in kovarianter Form. Mit  $x^0 := ct$  wird aus (2) die Gleichung

$$\partial_0\phi + \partial_i A^i = 0.$$

Setzt man also  $A^0 := \phi$ , so folgt aus (2) die LORENTZ-Eichung in Tensorschreibweise

$$\partial_\mu A^\mu = 0.\tag{3}$$

Da die  $\partial_\mu$  einen kovarianten Vektor bilden, müssen die  $A^\mu$  also wie ein kontravarianter Vierervektor transformieren. Wir nennen

$$A^\mu \equiv (\phi, \mathbf{A})\tag{4}$$

das *Viererpotential*. Dies lautet in der kovarianten Form

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu}A^\nu = (\phi, -\mathbf{A}).$$

Die Potentialgleichungen lauten in Anwesenheit von Strömen und Ladungen

$$\begin{aligned}\square\phi &= \frac{4\pi}{c}c\rho \\ \square\mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.\end{aligned}\tag{5}$$

Führt man  $j^0 := c\rho$  ein, so können diese in der Form

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c}j^\mu\tag{6}$$

geschrieben werden. Auf der linken Seite von (6) steht ein Vierervektor. Da (6) aber in jedem zulässigen Bezugssystem gelten muß, folgt daraus, daß auch

$$j^\mu \equiv (c\rho, \mathbf{j})\tag{7}$$

ein Vierervektor ist. Man spricht vom *Viererstrom*.

Damit haben wir die Potentialgleichungen (5) in kovariante Form gebracht. Machen wir einen Bezugssystemwechsel von S in ein anderes Inertialsystem S', so hat die Gleichung (6) dort immer noch die gleiche Form. In S' gilt dann nämlich

$$\square A'^\mu = \frac{4\pi}{c}j'^\mu.\tag{6'}$$

Die neuen Vektorfelder  $A'^\mu$  und  $j'^\mu$  haben dort zwar andere Gestalt — da ( $A^\mu$ ) und ( $j^\mu$ ) Vierervektoren sind, gilt

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu,$$

ebenso für  $j^\mu$  —, die Gleichung (6') hat jedoch dieselbe Form wie (6). Anders ausgedrückt: Mittels den Phänomenen, die (6) beschreibt, können wir die Inertialsysteme S und S' nicht unterscheiden. Die Form von Gleichung (6) ändert sich nicht unter einer LORENTZ-Transformation; Forminvarianz ist Symmetrie.

Wir wollen jetzt das elektromagnetische Feld in einer kovarianten Größe zusammenfassen. Die Feldstärken entstehen durch Differentiation aus den Potentialen, wir versuchen also, ob uns der Ansatz

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\tag{8}$$

zum Ziel führt. Dies ist — wie wir sehen werden — tatsächlich der Fall. Man nennt den antisymmetrischen Tensor  $F_{\mu\nu}$  den *Feldstärketensor*.

Offensichtlich läßt die Eichtransformation, die sich jetzt in der Form

$$A^\mu \mapsto A^\mu + \partial^\mu f$$

schreibt (es gilt  $\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu = (\partial_0, -\partial_i)$ ), den Feldstärketensor invariant, denn

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} &\mapsto \partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu f) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu f) \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Wir berechnen jetzt die Komponenten des Feldstärketensors unter Verwendung der Gleichungen

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \text{rot } \mathbf{A} \quad \text{und} \\ \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\partial_t \mathbf{A} - \text{grad } \phi.\end{aligned}\tag{9}$$

Zunächst gilt aufgrund der Definition des Feldstärketensors

$$F_{00} = F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0.$$

Für die  $F_{0i}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} F_{0i} &= \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = \partial_0(-A^i) - \partial_i A^0 \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A^i - \frac{\partial}{\partial x^i} \phi = \mathbf{E}_i. \end{aligned}$$

Die restlichen Komponenten ergeben sich zu

$$\begin{aligned} F_{12} &= \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = -\partial_1 A^2 + \partial_2 A^1 \\ &= -(\text{rot } \mathbf{A})^3 = -\mathbf{H}^3 \\ F_{13} &= -\partial_1 A^3 + \partial_3 A^1 = \mathbf{H}^2 \end{aligned}$$

und

$$F_{23} = -\partial_2 A^3 + \partial_3 A^2 = -\mathbf{H}^1.$$

Es sei bemerkt, daß die dreidimensionalen “Vektoren” keine Vektoren im Sinne des Tensorkalküls in der vierdimensionalen Raumzeit mit dem metrischen Tensor 13(3) sind. Damit ist auch gleichgültig, ob man den Index oben oder unten schreibt.

Insgesamt finden wir für den Feldstärketensor also

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 & \mathbf{E}_3 \\ -\mathbf{E}_1 & 0 & -\mathbf{H}^3 & \mathbf{H}^2 \\ -\mathbf{E}_2 & \mathbf{H}^3 & 0 & -\mathbf{H}^1 \\ -\mathbf{E}_3 & -\mathbf{H}^2 & \mathbf{H}^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

zusammengefaßt

$$F_{0i} = \mathbf{E}_i, \quad F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} \mathbf{H}^k. \quad (11)$$

Es sei an dieser Stelle noch einmal daran erinnert, daß arabische Indizes stets von  $1 \dots 3$  und griechische von  $0 \dots 3$  laufen.

Aus (10) berechnet man leicht den Feldstärketensor in kontravarianter Schreibweise: Es ist  $F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\varrho} F_{\sigma\varrho} = \eta^{\mu\sigma} F_{\sigma\varrho} \eta^{T\varrho\nu} = ((\eta^{\mu\nu})(F_{\mu\nu})(\eta^{T\mu\nu}))^{\mu\nu}$ , also

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{E}_1 & -\mathbf{E}_2 & -\mathbf{E}_3 \\ \mathbf{E}_1 & 0 & -\mathbf{H}^3 & \mathbf{H}^2 \\ \mathbf{E}_2 & \mathbf{H}^3 & 0 & -\mathbf{H}^1 \\ \mathbf{E}_3 & -\mathbf{H}^2 & \mathbf{H}^1 & 0 \end{pmatrix}$$

oder

$$F^{0i} = -\mathbf{E}_i, \quad F^{ij} = -\varepsilon_{ijk} \mathbf{H}^k.$$

Wegen der Definition des Feldstärketensors  $F_{\mu\nu}$  gilt — wie man leicht durch Nachrechnen bestätigt — die Identität

$$\partial_\varrho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\varrho} + \partial_\nu F_{\varrho\mu} = 0. \quad (12)$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht ein Tensor 3. Stufe, (12) würde demnach  $4^3 = 64$  Gleichungen beinhalten. Ist jedoch  $\mu = \nu$ ,  $\mu = \varrho$  oder  $\nu = \varrho$ , so verschwindet die linke Seite trivialerweise, da  $F_{\mu\nu}$  antisymmetrisch ist. Es muß also  $\mu \neq \nu \neq \varrho$  sein, übrig bleiben 4 Gleichungen:

$$(\mu = 1, \nu = 2, \varrho = 3) :$$

$$\partial_3 F_{12} + \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} = -(\partial_3 \mathbf{H}^3 + \partial_1 \mathbf{H}^1 + \partial_2 \mathbf{H}^2) = -\text{div } \mathbf{H} = 0;$$

$$(\mu = 0, \nu = 2, \varrho = 3) :$$

$$\partial_3 F_{02} + \partial_0 F_{23} + \partial_2 F_{30} = \partial_3 \mathbf{E}_2 - \partial_0 \mathbf{H}^1 - \partial_2 \mathbf{E}_3 = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{H}^1 - (\text{rot } \mathbf{E})^1 = 0,$$

die 2 anderen Gleichungen ((013) bzw. (012)) sind die 2 weiteren Komponenten von  $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{H}$ . Also ist die Identität (12) äquivalent zu den Gleichungen

$$\text{div } \mathbf{H} = 0 \quad (13)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{H} = 0, \quad (14)$$

den homogenen MAXWELL-Gleichungen.

Wir wollen (12) noch einfacher schreiben. Dazu kontrahieren wir den Tensor  $\partial_\varrho F_{\mu\nu}$  mit dem  $\varepsilon$ -Tensor  $\varepsilon^{\sigma\varrho\mu\nu}$ , was — nach Multiplikation mit  $1/2$  — den Tensor 1. Stufe

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\sigma\varrho\mu\nu}\partial_\varrho F_{\mu\nu} \quad (15)$$

liefert. Sei nun  $\sigma = 0$ . Sind dann zwei der Indizes  $\varrho$ ,  $\mu$  und  $\nu$  gleich, so verschwindet der  $\varepsilon$ -Tensor. Es bleiben also 6 Summanden, wobei  $\varrho$ ,  $\mu$  und  $\nu$  die 6 verschiedenen Permutationen von 1,2,3 annehmen. Da  $\varepsilon^{\sigma\varrho\mu\nu}\partial_\varrho F_{\mu\nu} = \varepsilon^{\sigma\varrho\nu\mu}\partial_\varrho F_{\nu\mu}$  wegen der Antisymmetrie von  $\varepsilon^{\sigma\varrho\mu\nu}$  und  $F_{\mu\nu}$ , erhält man in diesem Falle

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{0\varrho\mu\nu}\partial_\varrho F_{\mu\nu} = \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0$$

wegen der Identität (12). Der Tensor (15) stellt für  $\sigma = 1, 2, 3$  die linken Seiten der anderen 4 unabhängigen Identitäten von (12) dar, insgesamt gilt also

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\sigma\varrho\mu\nu}\partial_\varrho F_{\mu\nu} = 0. \quad (16)$$

Diese Gleichung ist — nach den obigen Überlegungen — äquivalent zur Identität (12).

Man definiert nun den zu einem Tensor  $F_{\varrho\sigma}$  dualen Tensor  $F^{*\mu\nu}$  durch die Festsetzung

$$F^{*\mu\nu} := \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}F_{\varrho\sigma}. \quad (17)$$

Da der  $\varepsilon$ -Tensor ein Pseudotensor ist, gilt dies auch für den zu einem Tensor dualen Tensor.

Mit dem dualen Tensor schreibt sich (16) in der Form

$$\partial_\varrho F^{*\varrho\sigma} = 0. \quad (18)$$

Diese Gleichung — die wegen der Äquivalenz zu (12) die 2 homogenen MAXWELL-Gleichungen darstellt — hat gegenüber der Identität (12) den Vorzug, daß man sofort sieht, daß sie 4 Gleichungen beinhaltet, da ja auf der linken Seite ein Pseudotensor 1. Stufe, also ein Pseudovektor steht. Es sei bemerkt, daß  $F^{*\mu\nu}$  antisymmetrisch ist. Man prüft dies leicht nach.

Wir wollen jetzt einige Bemerkungen über den  $\varepsilon$ -Tensor anschließen und danach  $F^{*\mu\nu}$  berechnen.

Wir definieren  $\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}$  durch die Festsetzung

$$\varepsilon_{0123} := +1, \quad (19)$$

und, daß  $\varepsilon$  total (d.h. in allen Indexpaaren) antisymmetrisch ist. Der kontravarianten  $\varepsilon$ -Tensor folgt durch wiederholte Kontraktion mit dem metrischen Tensor zu

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} &= \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}\eta^{\gamma\varrho}\eta^{\delta\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} \\ &= \eta^T{}^{\mu\alpha}\eta^T{}^{\nu\beta}\eta^T{}^{\varrho\gamma}\eta^T{}^{\sigma\delta}\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} \\ &= \det \eta^T \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}. \end{aligned} \quad (20)$$

Ebenso definieren wir den  $\varepsilon$ -Tensor 3. Stufe  $\varepsilon_{ijk}$ . Da  $\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk}$  gilt  $\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{ijl} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$ . Weiterhin ist  $\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{0ijk} = -\varepsilon^{0ijk}$  wegen (20).

Nach diesen Vorbemerkungen soll  $F^{*\mu\nu}$  berechnet werden. Es ist

$$\begin{aligned} F^{*0i} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{0ijk}F_{jk} \\ &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F_{jk} \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{jkl}\mathbf{H}^l \\ &= \delta_i^l\mathbf{H}^l = \mathbf{H}^i, \end{aligned}$$

und mit  $i, j \neq 0$ :

$$\begin{aligned} F^{*ij} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ijkl} F_{kl} \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon^{ij0k} F_{0k} + \varepsilon^{ijk0} F_{k0}) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^{0ijk} (F_{0k} - F_{k0}) \\ &= \varepsilon^{0ijk} F_{0k} = -\varepsilon^{ijk} \mathbf{E}_k. \end{aligned}$$

Damit ist — nach Kontraktionen mit  $g_{\mu\nu}$ :

$$F_{0i}^* = -\mathbf{H}^i \quad ; \quad F_{ij}^* = -\varepsilon_{ijk} \mathbf{E}^k,$$

oder

$$F_{\mu\nu}^* = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{H}^1 & -\mathbf{H}^2 & -\mathbf{H}^3 \\ \mathbf{H}^1 & 0 & -\mathbf{E}^3 & \mathbf{E}^2 \\ \mathbf{H}^2 & \mathbf{E}^3 & 0 & -\mathbf{E}^1 \\ \mathbf{H}^3 & -\mathbf{E}^2 & \mathbf{E}^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die *Dualitätstransformation*  $F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu}^*$  transformiert also

$$(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \rightarrow (-\mathbf{H}, \mathbf{E}).$$

Nach diesen Betrachtungen schreiben wir die inhomogenen MAXWELL-Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi \varrho \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \end{aligned}$$

in kovarianter Form. Mit dem Vierervektor

$$j^\mu = (c\varrho, \mathbf{j})$$

lauten diese

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (19)$$

Um dies zu zeigen, sei  $\mu = 0$ . Dann lautet (19)

$$\partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \varrho,$$

mit  $\mu = 1$  wird

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} \\ = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E}^1 + \partial_2 \mathbf{H}^3 - \partial_3 \mathbf{H}^2 \\ = (\operatorname{rot} \mathbf{H})^1 - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E}^1 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^1. \end{aligned}$$

Man erhält also genau die homogenen Gleichungen.

Zusammenfassend können wir die MAXWELL-Gleichungen jetzt also in der Form

$$\begin{aligned} \partial_\varrho F^{*\varrho\sigma} &= 0 \\ \partial_\nu F^{\nu\mu} &= \frac{4\pi}{c} j^\mu \end{aligned}$$

schreiben, wobei  $F^{\mu\nu}$  der Feldstärketensor,  $F^{*\mu\nu}$  der zu diesem duale Tensor und  $j^\mu$  der Viererstromvektor ist.

Zum Abschluß dieses Kapitels leiten wir noch 2 Invarianten des Feldstärketensors her. Dies sind

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)$$

und

$$F^{*\mu\nu} F_{\mu\nu} = 4\mathbf{E}\mathbf{H}.$$

Die Größen  $\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2$  und  $\mathbf{E}\mathbf{H}$  bleiben also bei Bezugssystemtransformationen erhalten. Da  $F^{*\mu\nu}$  ein Pseudotensor ist, ist  $\mathbf{E}\mathbf{H}$  ein Pseudoskalar; bei Spiegelung ändert  $\mathbf{E}\mathbf{H}$  also sein Vorzeichen. Die Aussagen  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$  oder  $|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}|$  sind also Invariant. Gilt eine invariante Aussage in einem Inertialsystem S, so auch in allen anderen inertialen Bezugssystemen.

## 15. Kovarianter LAGRANGE-Formalismus

In der Mechanik haben wir das HAMILTONsche Prinzip kennengelernt. Dieses besagt, daß bestimmten mechanischen Systemen eine Funktion

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i),$$

die sogenannte LAGRANGE-Funktion zugeordnet ist, sodaß die Lösung  $\tilde{q}_i(t)$  der Bewegungsgleichungen bei vorgegebenen Randwerten  $q_i(t_1)$ ,  $\dot{q}_i(t_1)$ ,  $q_i(t_2)$  und  $\dot{q}_i(t_2)$  das *Wirkungsintegral*

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) dt \quad (1)$$

extremal macht. Als notwendige Bedingung hierfür haben wir die EULER-LAGRANGESchen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (2)$$

hergeleitet.

Die LAGRANGE-Funktion eines freien Teilchens im Potential  $V(\mathbf{x})$  ist durch

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x})$$

gegeben.

Diesen Formalismus wollen wir nun so abändern, daß er relativistisch kovariant wird. Dazu müssen wir über einen Skalar integrieren. Wir wählen das durch

$$ds^2 = (dx^0)^2 - d\mathbf{x}^2 \quad (3)$$

definierte Raumzeitdifferential  $ds$ , das — wie wir schon gesehen haben — unter LORENTZ-Transformationen invariant ist, also in der Tat einen Skalar darstellt. Es gilt also

$$ds^2 = ds'^2.$$

Wir machen — mit  $a$  als zu bestimmender Konstante — also folgenden Ansatz:

$$W = a \int_{s_1}^{s_2} ds.$$

Dieser wird mit

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{ds^2} = \sqrt{(dx^0)^2 - d\mathbf{x}^2} \\ &= dx^0 \sqrt{1 - (d\mathbf{x}/dx^0)^2} \\ &= c \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} dt \end{aligned}$$

zu

$$W = ac \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} dt.$$

Um  $a$  zu bestimmen, wollen wir die Tatsache benutzen, daß dies im Grenzfall  $c \rightarrow \infty$  mit der Wirkung der NEWTONschen Mechanik übereinstimmen muß. Wegen

$$\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} + \dots$$

wird — nach Weglassen des konstanten Anteils, der die Bewegungsgleichungen nicht berührt —

$$W \approx -\frac{1}{2} \frac{a}{c} \int \mathbf{v}^2 dt \stackrel{!}{=} \int \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 dt.$$

Daraus erhalten wir die Konstante  $a$  zu

$$a = -mc.$$

Für ein freies relativistisches Teilchen lautet die LAGRANGE-Funktion somit

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}, \quad (4)$$

die Wirkung berechnet sich nach

$$W = -mc^2 \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} dt. \quad (5)$$

Daraus folgen — mittels der EULER-LAGRANGESchen Gleichungen — die Bewegungsgleichungen. Mit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = \frac{mv^i}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} =: p^i$$

lauten die kovarianten Bewegungsgleichungen für ein freies relativistisches Teilchen also

$$\frac{d}{dt} \frac{mv^i}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} = 0. \quad (6)$$

Die Energie berechnen wir mit der HAMILTON-Funktion

$$\mathcal{H} := p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \quad (7)$$

zu

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{m\mathbf{v}^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} + mc^2 \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Um die Übereinstimmung mit der NEWTONSchen Mechanik festzustellen, entwickeln wir wieder die Wurzel und erhalten

$$\mathcal{H} = mc^2 + \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \dots,$$

was — bis auf die Konstante — mit der Energie der NEWTONSchen Mechanik übereinstimmt.

Im Anschluß an die Berechnung der Energie konstruieren wir nun eine wichtige Invariante. Es ist

$$E^2 = \frac{m^2 c^4}{1 - \mathbf{v}^2/c^2}$$

und

$$\mathbf{p}^2 = \frac{m^2 \mathbf{v}^2}{1 - \mathbf{v}^2/c^2},$$

also

$$\frac{1}{c^2} E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2. \quad (9)$$

Diese Gleichung heißt *relativistische Dispersionsrelation*. Man schreibt sie auch in der Form  $E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ . Die *Ruhemasse*  $m$  ist ein Skalar, damit also

$$\frac{1}{c^2} E^2 - \mathbf{p}^2$$

eine Invariante. Anders ausgedrückt ist

$$p_\mu := (E/c, \mathbf{p}) \quad (10)$$

ein Vierervektor, denn

$$p_\mu p^\mu = E^2/c^2 - \mathbf{p}^2 = \text{inv.}$$

Man nennt ihn den *Energie-Impuls*-Vierervektor.

Dieses Ergebnis kann man auch auf anderem Wege erhalten. Die Vierergeschwindigkeit

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{ds}$$

ist wegen

$$u^\mu u_\mu = \frac{dx^\mu dx_\mu}{ds^2} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1$$

ein Vierervektor mit den Raumkoordinaten

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = \frac{dx^i}{c\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} dt} = \frac{1}{c} \frac{v^i}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}},$$

damit also

$$p^i = mc u^i.$$

Die Zeitkoordinate ist

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2},$$

also

$$E = mc^2 u^0.$$

Mit  $u^\mu$  ist aber auch

$$p^\mu = mc u^\mu = (E/c, p^i)$$

ein Vierervektor.

Wie wir gesehen haben, lautet die Wirkung für ein freies Teilchen

$$W_0 = -mc \int ds.$$

Jetzt wollen wir ein elektromagnetisches Feld zulassen, d.h. das Teilchen soll sich in einem elektromagnetischen Feld befinden und mit diesem wechselwirken. Dann ist die Wirkung

$$W = W_0 + b \int_{s_1}^{s_2} A_\mu dx^\mu, \quad (11)$$

wobei  $b$  eine noch näher zu bestimmende Konstante ist. Mittels  $dx^0 = c dt$  und  $dx^i = \frac{dx^i}{dt} dt = v^i dt$  schreibt sich (11) in der Form

$$W = W_0 + b \int (cA_0 + A_i v^i) dt. \quad (12)$$

Um  $b$  zu bestimmen, nehmen wir  $A_i = 0$  an — wir wollen also nur ein elektrisches Feld zulassen — und erhalten dann den 2. Summanden in (11) zu

$$bc \int \phi dt,$$

da  $A_0 = \phi$ . Im klassischen Fall ist dies die potentielle Energie des Teilchens, da  $\mathcal{L}_{\text{klass}} = T - U$ . Wegen  $U = q\phi$  wird also  $b = -q/c$ , damit

$$W = W_0 - \frac{q}{c} \int A_\mu dx^\mu. \quad (13)$$

Insgesamt haben wir also für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld die LAGRANGE-Funktion

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} + \frac{q}{c}\mathbf{A}\mathbf{v} - q\phi, \quad (14)$$

wobei  $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$  benutzt wurde.

Aus (14) sollen nun noch die Bewegungsgleichungen eines Teilchens im elektromagnetischen Feld berechnet werden. Es ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = \frac{q}{c}((\partial_i A_j)v^j - c\partial_i \phi).$$

Aus

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} = p_i + \frac{q}{c}A_i$$

folgt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} = \dot{p}_i + \frac{q}{c}\partial_t A_i + \frac{q}{c}v^j \partial_j A_i,$$

insgesamt also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} &= \dot{p}_i + \frac{q}{c}\partial_t A_i + \frac{q}{c}v^j \partial_j A_i - \frac{q}{c}((\partial_i A_j)v^j - c\partial_i \phi) \\ &= \dot{p}_i + q(\partial_i \phi + \frac{1}{c}\partial_t A_i) + \frac{q}{c}(v^j \partial_j A_i - v^j \partial_i A_j) \\ &= \dot{p}_i - q(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H})_i, \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \times \mathbf{H})_i &= \varepsilon_{ijk} v_j \mathbf{H}_k = \varepsilon_{ijk} v_j (\text{rot } \mathbf{A})_k \\ &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} v_j \partial_l A_m \\ &= v_j \partial_i A_j - v_j \partial_j A_i. \end{aligned}$$

Die aus der LAGRANGE-Funktion folgende Bewegungsgleichung lautet damit

$$\dot{\mathbf{p}} = q(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}).$$

## 16. Elektrostatik im Medium

Bisher haben wir uns nur mit der Elektrostatik in Anwesenheit von Ladungen und Leitern beschäftigt. Dabei lauteten die das Feld bestimmenden MAXWELL-Gleichungen

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\varrho \quad (1)$$

$$\text{und } \text{rot } \mathbf{E} = 0. \quad (2)$$

Die Effekte dichter Medien haben wir bewußt außer Acht gelassen. Diese Lücke soll jetzt ausgefüllt werden. Dazu zerlegen wir die Ladungsverteilung in eine explizite — uns direkt zugängliche — Ladungsverteilung  $\varrho_{\text{expl}}$ , und einer gemittelten Ladungsverteilung  $\bar{\varrho}$  für das Medium, mit

$$\varrho = \bar{\varrho} + \varrho_{\text{expl}}. \quad (3)$$

Wir fordern, daß die Medien insgesamt elektrisch neutral sein sollen, mit anderen Worten

$$\int \bar{\varrho} d^3x = 0. \quad (4)$$

Die Ladungsverteilung  $\bar{\varrho}$  besitze das Potential  $\bar{\phi}$ , d.h. es sei

$$\Delta \bar{\phi} = -4\pi\bar{\varrho}, \quad (5)$$

damit aber

$$\bar{\phi} = \int \frac{\bar{\varrho}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3 y.$$

Gilt  $\bar{\varrho} = 0$  außerhalb eines bestimmten Gebietes und ist  $\mathbf{x}$  weit weg von diesem, so können wir das Potential entwickeln, es wird unter Berücksichtigung von (4)

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\mathbf{x}) &= -\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \int \bar{\varrho}(\mathbf{y}) y^i d^3 y + \dots \\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \mathbf{d}^i + \dots \end{aligned}$$

mit dem Dipolmoment  $\mathbf{d}$ . Die Ladungsverteilung  $\bar{\varrho}$  innerhalb eines kleinen Gebietes läßt sich also durch einen Dipol nähern. Zerlegt man das Medium in lauter kleine Gebiete, so kann man jedes davon durch solch einen Dipol ersetzen. Wir wollen das Medium jetzt durch die Verteilung dieser Dipole, der *Polarisationsdichte*  $\mathbf{P}^i(\mathbf{y})$  beschreiben. Wir erhalten dann für das Potential

$$\bar{\phi} = -\frac{\partial}{\partial x^i} \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \mathbf{P}^i(\mathbf{y}) d^3 y.$$

Um einen Zusammenhang zwischen  $\bar{\varrho}$  und  $\mathbf{P}^i$  zu erhalten, leiten wir daraus die Ladungsverteilung  $\bar{\varrho}$  her: Es ist

$$\begin{aligned} \bar{\varrho} &= -\frac{1}{4\pi} \Delta \bar{\phi} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x^i} \int \underbrace{\Delta_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}}_{=-4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \mathbf{P}^i(\mathbf{y}) d^3 y \\ &= -\frac{\partial}{\partial x^i} \mathbf{P}^i(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

also

$$\bar{\varrho} = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (6)$$

Wegen  $\int \bar{\varrho} d^3 x = 0$  folgt mit dem GAUSSSchen Satz  $\int \operatorname{div} \mathbf{P} d^3 x = \int \mathbf{P} d\mathbf{F} = 0$ ,  $\mathbf{P}$  verschwindet also im Unendlichen. Der Zusammenhang zwischen  $\mathbf{d}$  und  $\mathbf{P}$  ist

$$\mathbf{d}^i = \int \bar{\varrho} x^i d^3 x = -\int \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{P}}_{\partial_j \mathbf{P}^j} x^i d^3 x = \int \mathbf{P}^i(\mathbf{x}) d^3 x,$$

wobei letztere Gleichung durch partielle Integration folgt.  $\mathbf{P}$  ist also die Dichte der Dipole.

Das  $\mathbf{P}$ -Feld kann man in die MAXWELL-Gleichungen einführen. Aus

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi(\varrho_{\text{expl}} + \bar{\varrho}) = 4\pi\varrho_{\text{expl}} - \operatorname{div} 4\pi\mathbf{P}$$

folgt

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 4\pi\varrho_{\text{expl}}. \quad (7)$$

Man nennt die Größe

$$\mathbf{D} := \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \quad (8)$$

die *dielektrische Verschiebung*. Der Vorteil der zu (7) äquivalenten Gleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\varrho_{\text{expl}} \quad (9)$$

gegenüber der Gleichung (1) ist die Tatsache, daß in (9) die gemittelte — und unter Umständen uns gar nicht zugängliche — Ladungsverteilung  $\bar{\varrho}$  nicht mehr erscheint. Die Gleichungen der Elektrostatik lauten jetzt

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho_{\text{expl}} \quad (10)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (11)$$

Zur Lösung dieser Gleichungen muß man jedoch den Zusammenhang  $\mathbf{D}(\mathbf{E})$  kennen.

Wir machen jetzt zwei Aussagen über das Verhalten der Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{D}$  an Grenzflächen. Wegen (11) ist

$$\oint \mathbf{E} ds = 0. \quad (12)$$

Betrachtet man den Integrationsweg in Abb. 16.1, so sieht man, daß aus (11) sofort die Tatsache folgt, daß die Tangentialkomponente von  $\mathbf{E}$  an einer Grenzfläche stetig ist, also

$$\mathbf{E}_{\parallel} \text{ stetig an Grenzflächen.} \quad (13)$$

Sei an der Grenzfläche  $\varrho_{\text{expl}} = 0$ . Dann folgt aus  $\text{div } \mathbf{D} = 0$  die Integralbeziehung

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{F} = 0,$$

welche auf das Integrationsgebiet in Abb. 16.2 angewandt, die Tatsache

$$\mathbf{D}_{\perp} \text{ stetig an Grenzflächen} \quad (14)$$

ans Licht zieht.

Den Zusammenhang  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  wollen wir — idealisierend — als linear annehmen, d.h. es sei

$$\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E}, \quad (\kappa > 0) \quad (15)$$

wobei  $\kappa$  die *dielektrische Suszeptibilität* ist. Für  $\mathbf{D}$  wird dann

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = (1 + 4\pi\kappa)\mathbf{E},$$

mit der *Dielektrizitätskonstante*  $\varepsilon = 1 + 4\pi\kappa$  also

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}. \quad (\varepsilon > 1) \quad (16)$$

Dies bedeutet, daß — wegen der Stetigkeit von  $\mathbf{D}_{\perp}$  an Grenzflächen — die Größe  $\varepsilon \mathbf{E}_{\perp}$  stetig ist.

Für  $\varrho_{\text{expl}}$  kann man ein Analogon zur POISSON-Gleichung niederschreiben. Wegen  $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$  ist  $\mathbf{D} = -\varepsilon \text{grad } \phi$ , was mit  $\text{div } \mathbf{D} = 4\pi\varrho_{\text{expl}}$  zu

$$\text{div}(\varepsilon \text{grad } \phi) = -4\pi\varrho_{\text{expl}} \quad (17)$$

wird. Dabei ist  $\varepsilon$  i.A. vom Ort abhängig, d.h. ein Feld.

An dieser Stelle läßt sich noch etwas über die gemittelte Ladungsverteilung  $\bar{\varrho}$  aussagen: Ist  $\text{div } \mathbf{D} = 0$ , so wird

$$\begin{aligned} \bar{\varrho} &= -\text{div } \mathbf{P} = -\text{div } \kappa \mathbf{E} \\ &= -\text{div } \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E} = -\text{div } \frac{1}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \mathbf{D} \\ &= \frac{1}{4\pi} \text{div} \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D} \right) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{D} \text{grad } \varepsilon. \end{aligned}$$

Ist  $\varepsilon$  konstant, so folgt daraus  $\bar{\varrho} = 0$ . Es ist also nur an Grenzflächen, wo sich  $\varepsilon$  ändert,  $\bar{\varrho} \neq 0$ .

Als Beispiel zur Anwendung von (17) sei folgende Aufgabe gestellt: Gegeben sind zwei Halbräume  $V_{>}$  ( $z > 0$ ) und  $V_{<}$  ( $z < 0$ ), in denen sich Stoffe mit den Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_2$  (in  $V_{<}$ ) und  $\varepsilon_1$  (in  $V_{>}$ ) befinden. Desweiteren befinde sich in  $V_{>}$  am Orte  $\mathbf{a} = (0, 0, a)$  eine Punktladung  $q$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \Delta \phi_{>} &= -4\pi q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) && \text{in } V_{>} \text{ und} \\ \varepsilon_2 \Delta \phi_{<} &= 0 && \text{in } V_{<}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind unter Beachtung der Randbedingungen

$$\mathbf{D}_\perp, \mathbf{E}_\parallel \text{ stetig an } z = 0$$

zu lösen. Dazu zunächst zur ersten Gleichung. Wir denken uns bei  $-\mathbf{a}$  eine Spiegelladung  $q'$ , womit

$$\phi_{>}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_1} \left( \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} + \frac{q'}{|\mathbf{x} + \mathbf{a}|} \right) \quad (18)$$

wird. Um die Gleichung für  $V_{<}$  zu lösen, setzen wir in  $\mathbf{a}$  eine Ladung  $q''$  an, welche

$$\phi_{<}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{q''}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} \quad (19)$$

liefert. Die Stetigkeit von  $\mathbf{D}_\perp$  in  $z = 0$  fordert

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \phi_{>}}{\partial z} \Big|_{z=0} = \varepsilon_2 \frac{\partial \phi_{<}}{\partial z} \Big|_{z=0},$$

was wegen

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} = -\frac{z - a}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^3} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|\mathbf{x} + \mathbf{a}|} = -\frac{z + a}{|\mathbf{x} + \mathbf{a}|^3}$$

durch

$$q - q' = q'' \quad (20)$$

gewährleistet wird. Die Stetigkeit von  $\mathbf{E}_\parallel$  liefert über

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} = -\frac{x}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^3} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\mathbf{x} + \mathbf{a}|} = -\frac{x}{|\mathbf{x} + \mathbf{a}|^3}$$

dann

$$\frac{q + q'}{\varepsilon_1} = \frac{q''}{\varepsilon_2}. \quad (21)$$

Die Bedingungen (20) und (21) sind gleichzeitig erfüllbar. Auflösung des Gleichungssystems ergibt

$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$$

$$q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q.$$

## 17. Dispersion

In Medien hängt — wie die Erfahrung zeigt — die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  in nicht unbeträchtlichem Maße von der Frequenz der durchtretenden Welle ab. Diese Abhängigkeit soll in diesem Kapitel untersucht werden.

Um den Zusammenhang zwischen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{D}$  zu formulieren, transformieren wir die Felder in den Frequenzraum, schreiben also

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} \tilde{\mathbf{D}}(\omega, \mathbf{x}) d\omega \quad (1)$$

und

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} \tilde{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{x}) d\omega. \quad (2)$$

Dann drückt sich die Frequenzabhängigkeit von  $\varepsilon$  in der Gleichung

$$\tilde{\mathbf{D}}(\omega, \mathbf{x}) = \varepsilon(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{x}) \quad (3)$$

aus. Es gilt also

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} \varepsilon(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{x}) d\omega.$$

Setzt man darin

$$\tilde{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\omega t'} \mathbf{E}(t', \mathbf{x}) dt',$$

so läßt sich der Zusammenhang zwischen  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{E}$  durch

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int \int e^{-i\omega(t-t')} \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(t', \mathbf{x}) dt' d\omega$$

ausdrücken, was sich mit

$$\varepsilon(t-t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega(t-t')} \varepsilon(\omega) d\omega \quad (4)$$

zu

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varepsilon(t-t') \mathbf{E}(t', \mathbf{x}) dt' \quad (5)$$

vereinfacht.

Diese Rechnung hätte man auch für  $1 + 4\pi\kappa$  an Stelle von  $\varepsilon$  durchführen können, was den zu  $\varepsilon = 1 + 4\pi\kappa$  analogen Ausdruck

$$\varepsilon(t-t') = \delta(t-t') + 4\pi\kappa(t-t') \quad (6)$$

geliefert hätte. Dieser ermöglicht es uns,  $\mathbf{P}$  mit  $\mathbf{E}$  durch

$$\mathbf{P}(t, \mathbf{x}) = \int \kappa(t-t') \mathbf{E}(t', \mathbf{x}) dt' \quad (7)$$

zu verknüpfen. Da  $\mathbf{P}$  nur durch das in der Vergangenheit liegende  $\mathbf{E}$  bestimmt wird, muß  $\kappa(t-t')$  für  $t' > t$  verschwinden. Man nennt

$$\kappa(\tau) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{für } \tau \leq 0 \quad (8)$$

eine *Kausalitätsforderung*. Die FT von  $\kappa$  ist also

$$\tilde{\kappa}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \kappa(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \kappa(t) dt. \quad (9)$$

Wir betrachten nun  $\tilde{\kappa}(\omega)$  als Funktion von komplexem  $\omega$  und zeigen zunächst, daß  $\tilde{\kappa}(\omega)$  auf der oberen Halbebene ( $\text{Im}\omega > 0$ ) analytisch (oder holomorph) ist. Mit  $\omega = \omega_1 + i\omega_2$  wird der Integrand zu

$$e^{i\omega_1 t} \kappa(t) e^{-\omega_2 t}. \quad (10)$$

Dabei ist, falls  $\omega$  in der OHE liegt,  $e^{-\omega_2 t} \in [0, 1]$ .  $\tilde{\kappa}(\omega)$  existiert also in der OHE und ist damit dort auch analytisch.

Nach der CAUCHYSchen Integralformel gilt damit für jeden Punkt  $\omega$  innerhalb einer geschlossenen Kurve in der OHE

$$\tilde{\kappa}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\tilde{\kappa}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (11)$$

Integrationsweg sei die reelle Achse und ein unendlich großer Halbkreis in der OHE. Wir addieren im Nenner  $-i\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ . Damit kann die Formel in der Form

$$\tilde{\kappa}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\tilde{\kappa}(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} d\omega' \quad (12)$$

auch noch für reelle  $\omega$  benutzt werden; die Singularität des Integranden von (11) bei  $\omega' = \omega \in \mathbf{R}$  wird damit umgangen, sie liegt jetzt bei  $\omega' = \omega + i\varepsilon$ . Man kann (12) auch als Symbol für (11) und den in Abb. 17.1 dargestellten Integrationsweg betrachten.

Wir wählen den in Abb. 17.1 dargestellten Integrationsweg und berechnen das Integral. Der Anteil auf dem Halbkreis verschwindet, denn parametrisiert man  $\omega' = \omega + Re^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$ , so ist  $d\omega' = iRe^{it} dt$  und

$$\begin{aligned} \left| \int_{\text{Halbkreis}} \frac{\tilde{\kappa}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \right| &= \left| \int_0^\pi \tilde{\kappa}(\omega + Re^{it}) \frac{iRe^{it}}{Re^{it}} dt \right| \\ &= \left| i \int_0^\pi \tilde{\kappa}(\omega + Re^{it}) dt \right| \\ &\leq i\pi \max_{t \in (0, \pi)} |\tilde{\kappa}(\omega + Re^{it})| \rightarrow 0 \quad \text{falls } R \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (13)$$

Bezeichnet man den kleinen Halbkreis (um  $\omega$  mit Radius  $\delta$ ) mit  $H_\delta$ , so bleibt

$$\int \frac{\tilde{\kappa}(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} d\omega' = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{\omega - \delta} + \int_{\omega + \delta}^{\infty} \right) \frac{\tilde{\kappa}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_{H_\delta} \frac{\tilde{\kappa}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (14)$$

Hat eine Funktion  $f(x)$  nur einen Pol — und zwar 1. Ordnung — auf der reellen Achse bei  $x_0$ , so definiert man den *Hauptwert* des Integrals  $\int_{\mathbf{R}} f(x) dx$  durch

$$P \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{x_0 - \delta} f(x) dx + \int_{x_0 + \delta}^{\infty} f(x) dx \right). \quad (15)$$

Nun berechnen wir  $\int_{H_\delta} \frac{\tilde{\kappa}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$ . Mit  $\omega' = \omega + \delta e^{it}$ ,  $t \in [\pi, 2\pi]$  und  $d\omega' = i\delta e^{it} dt$  ist

$$\int_{H_\delta} \frac{\tilde{\kappa}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = \int_{H_\delta} \frac{\tilde{\kappa}(\omega + \delta e^{it})}{\delta e^{-it}} i\delta e^{-it} dt \rightarrow i\pi \tilde{\kappa}(\omega) \quad \text{falls } \delta \rightarrow 0. \quad (16)$$

Insgesamt ist also

$$\int \frac{\tilde{\kappa}(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} d\omega' = P \int \frac{\tilde{\kappa}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + i\pi \tilde{\kappa}(\omega). \quad (17)$$

Wegen  $\tilde{\kappa}(\omega) = \int \tilde{\kappa}(\omega') \delta(\omega - \omega') d\omega'$  schreibt man (17) auch in symbolischer Form

$$\frac{1}{\omega' - \omega - i\varepsilon} = P \frac{1}{\omega' - \omega} + i\pi \delta(\omega - \omega'). \quad (18)$$

Gleichung (12) liefert damit

$$\tilde{\kappa}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} P \int \frac{\tilde{\kappa}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + \frac{1}{2} \tilde{\kappa}(\omega)$$

also

$$\tilde{\kappa}(\omega) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\kappa}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (20)$$

und mit  $\varepsilon = 4\pi\kappa + 1$  erhält man die *Dispersionsbeziehung*

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\varepsilon}(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (20)$$

Diese verknüpft Real- und Imaginärteil von  $\tilde{\varepsilon}(\omega) - 1$ , denn man erhält aus (20)

$$\operatorname{Re} \tilde{\varepsilon}(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \tilde{\varepsilon}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (21)$$

resp.

$$\operatorname{Im} \tilde{\varepsilon}(\omega) = -\frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \tilde{\varepsilon}(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (22)$$

Man nennt diese Beziehungen die *KRAMERS-KRONIG-Relationen*.

Als Beispiel soll nun ein Modell, das eine  $\varepsilon(\omega)$ -Funktion liefert, vorgestellt werden. Es handelt sich um das *Oszillatormodell* für die Dielektrizitätskonstante. Man denkt sich das Dielektrikum als aus lauter mikroskopischen Oszillatoren zusammengestellt, die hier durch mittels einer harmonischen Kraft gebundene Elektronen realisiert sind. Offensichtlich lautet die Bewegungsgleichung eines solchen Oszillators

$$m(\ddot{\mathbf{x}} + \gamma\dot{\mathbf{x}} + \omega_0^2\mathbf{x}) = -e\mathbf{E}_0(t), \quad (23)$$

dabei ist  $\gamma$  eine Konstante, die die Dämpfung beschreibt. Haben wir es speziell mit einer linear polarisierten, ebenen monochromatischen Welle zu tun, so konkretisiert sich (23) zu

$$m(\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2x) = -eE_0e^{-i\omega t}.$$

Der Ansatz  $x(t) = Ae^{-i\omega t}$  liefert dann

$$m(-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2)A = -eE_0,$$

also ist

$$A = -\frac{e}{m} \frac{E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}.$$

Der Oszillator stellt einen Dipol mit Dipolmoment

$$d = -ex = \frac{e^2}{m} \frac{E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} e^{i\omega t}$$

dar. Wir nehmen nun an, daß sich in einer Volumeneinheit  $N$  Moleküle mit je  $Z$  Elektronen befinden. Die Berücksichtigung der verschiedenen Bindungskräfte der Elektronen in einem Molekül —  $f_j$  Elektronen pro Molekül sollen die Bindungsfrequenz  $\omega_j$  besitzen — führt dann auf die Formel

$$\mathbf{P} = \frac{e^2}{m} N \underbrace{\sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}}_{=\kappa} \mathbf{E}$$

für die Polarisation (Dipolmomentdichte), woraus mit  $\varepsilon = 1 + 4\pi\kappa$  sofort

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{m} N \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}$$

folgt. Die Pole von  $\varepsilon(\omega)$  liegen wegen  $\gamma_i > 0$  in der unteren Halbebene.

## 18. Elektrodynamik im Medium

Bisher haben wir die MAXWELL-Gleichungen nur im Vakuum benutzt. Sie gelten aber auch in Anwesenheit von Materie; doch ist dann das Medium über seine innere Struktur zu berücksichtigen. Da dies wegen der vielen geladenen Teilchen aber kaum exakt möglich ist, führt man makroskopische Felder ein, die diese innere Struktur des Mediums berücksichtigen. Die *makroskopischen* MAXWELL-Gleichungen mit diesen Feldern wollen wir nicht streng herleiten, sondern nur niederschreiben und heuristisch begründen.

Zunächst die homogenen Gleichungen für  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$ . Diese gelten natürlich auch makroskopisch. Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0 \\ \text{und} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{H} &= 0. \end{aligned}$$

Nun führen wir die Felder  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{B}$  als makroskopische Felder für  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  ein. Mit diesen ist

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{D} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \end{aligned}$$

wobei  $\rho$  und  $\mathbf{j}$  jetzt nur die freien Ladungen bzw. Ströme bezeichnen. Im Prinzip halten wir damit die makroskopischen MAXWELL-Gleichungen schon auf der Hand. Man bezeichnet jedoch meistens das mikroskopische magnetische Feld mit  $\mathbf{B}$  und das makroskopische mit  $\mathbf{H}$ . Wir vertauschen also die Bezeichnungen und erhalten

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{D} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Außerdem wollen wir zwischen den jeweiligen sich entsprechenden Feldern einen linearen Zusammenhang annehmen:

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}.\end{aligned}\tag{2}$$

Die Erfahrung zeigt, daß bei elektromagnetischen Wellen  $\varepsilon$  und  $\mu$  i.A. von der Frequenz derer abhängen. Deshalb betrachten wir die MAXWELL-Gleichungen (1) im Frequenz-Ortsraum. Es ist

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{\mathbf{D}}(\omega, \mathbf{x}) e^{-i\omega t} d\omega,$$

analog für die anderen Felder. Transformation der 1. Gleichung von (1)

$$\begin{aligned}0 &= \operatorname{div} \mathbf{D} - 4\pi\rho = \operatorname{div} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{\mathbf{D}}(\omega, \mathbf{x}) e^{-i\omega t} d\omega \right) - \frac{4\pi}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{\rho}(\omega, \mathbf{x}) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (\operatorname{div} \tilde{\mathbf{D}} - 4\pi\tilde{\rho}) e^{-i\omega t} d\omega = 0\end{aligned}$$

ergibt

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{D}}(\omega, \mathbf{x}) = 4\pi\tilde{\rho}(\omega, \mathbf{x}).$$

Die letzte der Gleichungen (1)

$$\begin{aligned}0 &= \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{B} = \operatorname{div} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \operatorname{rot} \int \tilde{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{x}) e^{-i\omega t} d\omega + \frac{1}{c}\partial_t \int \tilde{\mathbf{B}}(\omega, \mathbf{x}) e^{-i\omega t} d\omega \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} - \frac{1}{c}i\omega \tilde{\mathbf{B}}) e^{-i\omega t} d\omega = 0\end{aligned}$$

liefert

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{1}{c}i\omega \tilde{\mathbf{B}}(\omega, \mathbf{x}).$$

Insgesamt erhält man aus dem System (1) die Gleichungen

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \tilde{\mathbf{D}} &= 4\pi\tilde{\rho} \\ \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}} + \frac{1}{c}i\omega \tilde{\mathbf{D}} &= \frac{4\pi}{c}\tilde{\mathbf{j}} \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{B}} &= 0 \\ \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} - \frac{1}{c}i\omega \tilde{\mathbf{B}} &= 0,\end{aligned}\tag{3}$$

und für die linearen Zusammenhänge

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{D}} &= \varepsilon(\omega)\tilde{\mathbf{E}} \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \mu(\omega)\tilde{\mathbf{H}}.\end{aligned}\tag{4}$$

Sei nun  $\rho, \mathbf{j} \equiv 0$ , damit auch  $\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{j}} \equiv 0$ . Für diesen Fall leiten wir die Wellengleichung her. Einerseits ist

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} = \operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} \tilde{\mathbf{E}}}_{=0} - \Delta \tilde{\mathbf{E}} = -\Delta \tilde{\mathbf{E}},$$

andererseits

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} &= \frac{1}{c} i\omega \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{c} i\omega \mu \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}} \\ &= \frac{1}{c} i\omega \mu \left(-\frac{1}{c} i\omega\right) \varepsilon \tilde{\mathbf{E}} \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \tilde{\mathbf{E}}.\end{aligned}$$

Die Wellengleichung lautet also

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu\right) \tilde{\mathbf{E}} = 0, \quad (5)$$

ebenso für  $\tilde{\mathbf{H}}$ .

Der Ansatz

$$\tilde{\mathbf{E}}(t, \mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)} \quad (6)$$

führt, eingesetzt in die Wellengleichung, über

$$-\mathbf{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \stackrel{!}{=} 0$$

mit  $n^2 \equiv \varepsilon \mu$  zur Forderung

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 \frac{c^2}{n^2} = \mathbf{k}^2 v^2. \quad (7)$$

Offensichtlich ist damit  $v = c/n$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle im Medium mit  $(\varepsilon, \mu)$ .

Mit

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}} &= \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)} \\ \tilde{\mathbf{H}} &= \tilde{\mathbf{H}}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)}\end{aligned}$$

folgen aus  $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{E}} = 0$  und  $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{H}} = 0$  die Gleichungen

$$\mathbf{k} \tilde{\mathbf{E}}_0 = 0; \quad \mathbf{k} \tilde{\mathbf{H}}_0 = 0. \quad (8)$$

Es sind also sowohl  $\tilde{\mathbf{E}}_0$  als auch  $\tilde{\mathbf{H}}_0$  senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle; damit liegt eine *transversale* Welle vor.

Aus  $\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{c} i\omega \mu \tilde{\mathbf{H}}$  folgt

$$i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}_0 = \frac{i\omega}{c} \mu \tilde{\mathbf{H}}_0$$

oder

$$\tilde{\mathbf{H}}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \times \tilde{\mathbf{E}}_0 \quad (9)$$

und wegen  $\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}} = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon \tilde{\mathbf{E}}$  gilt

$$\tilde{\mathbf{E}}_0 = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \times \tilde{\mathbf{H}}_0, \quad (10)$$

was die Annahme

$$\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}, \mathbf{k} \text{ paarweise orthogonal}$$

beweist. Außerdem folgt aus (9) bzw. (10), daß  $\tilde{\mathbf{E}}$  und  $\tilde{\mathbf{H}}$  in Phase sind.

Mit den MAXWELL-Gleichungen läßt sich schnell eine Aussage über das Verhalten von elektromagnetischen Feldern an Grenzflächen zwischen zwei verschiedenen Medien machen. Dazu braucht man nur die Integralsätze.

Überlegen wir uns das Verhalten der zur Grenzfläche senkrechten Komponente des  $\mathbf{D}$ -Feldes  $\mathbf{D}_\perp$ . Wie in Abb. 18.1 gezeigt, wählen wir als Integrationsvolumen  $V$  eine Dose der Dicke  $\varepsilon > 0$ . Es seien keine freien Ladungen innerhalb  $V$ ; dann ist

$$0 = \int_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \int_{\partial V} \mathbf{D} d\mathbf{F} = (*).$$

Im Grenzfall  $\varepsilon \rightarrow 0$  ist der Mantel der Dose zu vernachlässigen. An den Dosedeckeln habe  $\mathbf{D}_\perp$  den Wert  $\mathbf{D}_\perp^{(1)}$  bzw.  $\mathbf{D}_\perp^{(2)}$ . Dann erweitern wir die Gleichungskette zu

$$(*) = (\mathbf{D}_\perp^{(1)} - \mathbf{D}_\perp^{(2)}) \mathbf{F} \stackrel{!}{=} 0.$$

Dies bedeutet, daß  $\mathbf{D}_\perp$  an der Grenzfläche stetig ist. Auf genau dieselbe Weise lehrt uns  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ , daß auch  $\mathbf{B}_\perp$  an der Grenzfläche stetig ist.

Um einen ähnlichen Schluß mittels

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{D} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

zu vollziehen, wählen wir eine Integrationsfläche nach Abb. 18.2. In Abwesenheit von Strömen freier Ladungen gilt

$$0 = \int_A (\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{D}) d\mathbf{F} = \oint_{\partial A} \mathbf{H} ds - \int_A \partial_t \mathbf{D} d\mathbf{F} = (*).$$

Lassen wir die Breite der Schleife gegen Null gehen, so verschwindet das 2. Integral. Mit der zur Grenzfläche parallelen Komponente  $\mathbf{H}_\parallel$  von  $\mathbf{H}$  ist dann

$$(*) = (\mathbf{H}_\parallel^{(1)} - \mathbf{H}_\parallel^{(2)}) l \stackrel{!}{=} 0,$$

es ist also  $\mathbf{H}_\parallel$  stetig an der Grenzfläche, was wegen  $\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} = 0$  auch für  $\mathbf{E}_\parallel$  gilt. Zusammengefaßt: Es sind

$$\mathbf{D}_\perp, \mathbf{B}_\perp, \mathbf{E}_\parallel \text{ und } \mathbf{H}_\parallel \text{ stetig} \quad (11)$$

an Grenzflächen.

Zum Schluß noch kurz etwas zur Energie. Nimmt man die Zusammenhänge  $\mathbf{D}(\mathbf{E})$  und  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  als linear an, so ist die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes im Medium

$$w = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{H}). \quad (12)$$

Ähnliche Rechnung wie in Kapitel 8 führt auf den POYNTING-Vektor

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (13)$$

Man kommt auf (12), indem man die 2. Gleichung von (1) mit  $\mathbf{E}$  multipliziert, das Produkt der 4. Gleichung von (1) mit  $\mathbf{H}$  davon subtrahiert und einige Umformungen vornimmt.

## 19. Ebene Wellen an Grenzflächen: Die FRESNELSchen Formeln

Im letzten Kapitel haben wir uns über die MAXWELLSchen Gleichungen im Medium

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi \rho \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{D} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \end{aligned} \quad (1)$$

bei linearen Zusammenhängen

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \end{aligned} \quad (2)$$

Gedanken gemacht. Wir haben gesehen, daß die ebene Welle

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)} \quad (3)$$

für  $\omega = \frac{c}{n} |\mathbf{k}|$ ;  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$  eine Lösung von (1) und (2) darstellt. Weiterhin haben wir aus (1) gefolgert, daß an Grenzflächen die Komponenten

$$\mathbf{D}_\perp, \mathbf{B}_\perp, \mathbf{E}_\parallel \text{ und } \mathbf{H}_\parallel \quad (4)$$

der Felder stetig sind. Mit diesem Wissen bewaffnet wollen wir uns überlegen, wie sich eine ebene Welle an einer Grenzfläche verhält. Zur Veranschaulichung halten wir uns dazu Abb. 19.1 vor Augen. Die Welle A trifft auf die Grenzfläche zwischen zwei Medien der Brechzahlen  $n$  resp.  $n'$ . Zu erwarten ist eine reflektierte sowie eine transmittierte Welle — mit B und C bezeichnet.

Die einfallende Welle sei durch

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)},$$

die transmittierte durch

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_0 e^{i(\mathbf{k}'\mathbf{x} - \omega' t)}$$

und die reflektierte durch

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_0 e^{i(\mathbf{k}''\mathbf{x} - \omega'' t)}.$$

bezeichnet. Dann beträgt die elektrische Feldstärke im Gebiet I

$$\mathbf{E}^I = \mathbf{E} + \mathbf{E}'' = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)} + \mathbf{E}''_0 e^{i(\mathbf{k}''\mathbf{x} - \omega'' t)},$$

im Gebiet II

$$\mathbf{E}^{II} = \mathbf{E}' = \mathbf{E}'_0 e^{i(\mathbf{k}'\mathbf{x} - \omega' t)}.$$

Damit  $\mathbf{E}_{\parallel}$  an der Grenzfläche überhaupt stetig sein kann, muß zunächst

$$\omega = \omega' = \omega''$$

gelten. Da aber  $\omega = \frac{c}{n} |\mathbf{k}|$ , folgt daraus

$$|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}''|$$

und

$$\frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}'|} = \frac{n}{n'}.$$

Weiterhin muß an der Grenzfläche ( $z = 0$ )

$$\mathbf{k}\mathbf{x} = \mathbf{k}'\mathbf{x} = \mathbf{k}''\mathbf{x}$$

für beliebige  $\mathbf{x}$  gelten. Daraus folgt

$$k_x = k'_x = k''_x$$

sowie

$$k_y = k'_y = k''_y,$$

ganz speziell also die Möglichkeit, die x-z-Ebene so zu legen, daß die  $\mathbf{k}$ -Vektoren darin liegen, womit dann deren y-Komponenten verschwinden. Wir haben dann

$$k \sin \alpha = k' \sin \alpha' = k'' \sin \alpha'',$$

woraus wegen  $k = k''$  das *Reflexionsgesetz*

$$\alpha = \alpha'' \tag{5}$$

sowie das *Brechungsgesetz*

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{k'}{k} = \frac{n'}{n} \tag{6}$$

folgen.

Dies waren die sogenannten kinematischen Eigenschaften der Welle an einer Grenzfläche, auf welche wir die dynamischen folgen lassen wollen.

Dazu seien zweckmäßigerweise zwei Fälle betrachtet. Zunächst nehmen wir an,  $\mathbf{E}_0$  liege in der *Einfallsebene*, der durch die  $\mathbf{k}$ -Vektoren aufgespannten Ebene. Stetigkeit von  $\mathbf{E}_x$  liefert über

$$-E_0 \cos \alpha + E''_0 \cos \alpha'' \stackrel{!}{=} -E'_0 \cos \alpha'$$

( $E_0 \equiv |\mathbf{E}|_0$ , gestrichene analog) die Beziehung

$$(E_0 - E_0'') \cos \alpha = E_0' \cos \alpha'. \quad (7)$$

Analog erhalten wir aus der Stetigkeit von  $\mathbf{D}_z$

$$\varepsilon \sin \alpha (E_0 + E_0'') = \varepsilon' E_0' \sin \alpha',$$

daraus schließlich mittels des Brechungsgesetzes

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (E_0 + E_0'') = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} E_0'. \quad (8)$$

Eliminiert man  $E_0''$  aus (7) und (8), so stößt man nach Gleichsetzen auf den Ausdruck

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2 \cos \alpha}{\sqrt{\frac{\mu \varepsilon'}{\varepsilon \mu'}} \cos \alpha + \cos \alpha'},$$

welcher durch Erweiterung mit  $nn'$  unter Berücksichtigung von

$$\sqrt{\frac{\varepsilon' \mu'}{\varepsilon \mu}} = \frac{n'}{n}$$

und

$$n' \cos \alpha' = \sqrt{n'^2 - n'^2 \sin^2 \alpha'} = \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \alpha}$$

wegen (6) zu

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2nn' \cos \alpha}{\frac{\mu}{\mu'} n'^2 \cos \alpha + n \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \alpha}} \quad (9)$$

wird. Dies ist eine der *FRESNELSchen Formeln*. Die zweite dieser Formeln erhält man durch Elimination von  $E_0'$  aus (7) und (8). Sehr ähnliche Rechnung wie oben führt auf

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{\frac{\mu}{\mu'} n'^2 \cos \alpha - n \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \alpha}}{\frac{\mu}{\mu'} n'^2 \cos \alpha + n \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \alpha}}. \quad (10)$$

Eine wichtige Folgerung aus dieser Formel basiert auf der Tatsache, daß (10) für  $\alpha \neq 0$  zu Null werden kann. Dies ist — unter der Annahme  $\mu = \mu'$  — der Fall, wenn

$$n'^2 \cos \alpha_B = n \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \alpha_B}. \quad (11)$$

Quadriert man diese Gleichung, dividiert durch  $\cos^2 \alpha_B$  und setzt  $1/\cos^2 \alpha_B = 1 + \tan^2 \alpha_B$ , so folgt

$$\tan \alpha_B = \frac{n'}{n}. \quad (12)$$

Ist also der Einfallswinkel einer Welle, bei der  $\mathbf{E}_0$  in der Einfallsebene liegt gleich dem *BREWSTER-Winkel*  $\alpha_B$ , so tritt keine Reflexion auf.

Der zweite Fall liegt vor, wenn  $\mathbf{E}_0$  senkrecht auf der Einfallsebene steht. Dann erhalten wir durch analoge Betrachtung die *FRESNEL-Formeln*

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2n \cos \alpha}{n \cos \alpha + \frac{\mu}{\mu'} \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \alpha}} \quad (13)$$

und

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{n \cos \alpha - \frac{\mu}{\mu'} \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \alpha}}{n \cos \alpha + \frac{\mu}{\mu'} \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \alpha}}. \quad (14)$$

In diesem Fall kann  $E_0''/E_0$  — wie durch kurze Rechnung zeigt — *nicht* Null werden. Schickt man also eine Welle unter dem BREWSTER-Winkel auf eine Grenzfläche, so verschwindet der zur Einfallsebene parallele Anteil der Amplitude der reflektierten Welle, nicht jedoch der senkrechte Anteil; mit anderen Worten: Die Welle wird polarisiert.

Jetzt noch einige Überlegungen zur *Polarisation*. Gegeben sei eine ebene Welle

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)} \quad (15)$$

wobei  $\mathbf{E}_0$  ein Vektor mit komplexen Komponenten ist. Das Quadrat von  $\mathbf{E}_0$  wird i.A. eine komplexe Zahl sein. Mit  $\alpha = -(\arg \mathbf{E}_0^2)/2$  und  $\varrho = |\mathbf{E}_0|^2$  ( $\alpha, \varrho \in \mathbf{R}$ ) existiert die Darstellung

$$\mathbf{E}_0^2 = \varrho e^{-2i\alpha}.$$

Damit ist das Quadrat des komplexen Vektors

$$\mathbf{b} = \mathbf{E}_0 e^{i\alpha}$$

reell und gleich dem Betragsquadrat von  $\mathbf{E}_0$ , denn

$$\mathbf{b}^2 = (\mathbf{E}_0 e^{i\alpha})^2 = \mathbf{E}_0^2 e^{2i\alpha} = \varrho.$$

Das bedeutet, daß — falls man  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2$  mit reellen Vektoren  $\mathbf{b}_1$  und  $\mathbf{b}_2$  schreibt — die Relation

$$\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 = 0$$

besteht. Stellen wir nun (15) in der Form

$$\mathbf{E} = \mathbf{b} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t - \alpha)}$$

dar. Wegen  $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{k}$  sind  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  und  $\mathbf{k}$  paarweise senkrecht. Dies ermöglicht es uns, ein Koordinatensystem so zu wählen, daß die Darstellungen  $\mathbf{b}_1 = (b_1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{b}_2 = (0, b_2, 0)$  und  $\mathbf{k} = (0, 0, k)$  bestehen. In diesem Koordinatensystem ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mathbf{E}_x &= b_1 \cos(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t - \alpha) & \text{und} \\ \operatorname{Re} \mathbf{E}_y &= \mp b_2 \sin(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t - \alpha). \end{aligned}$$

Jetzt unterscheiden wir 2 Fälle. Ist  $b_1 = 0$  oder  $b_2 = 0$ , so reden wir von einer *linear polarisierten Welle*; im Falle  $b_1 \neq 0$  und  $b_2 \neq 0$  gilt

$$\frac{\operatorname{Re}^2 \mathbf{E}_x}{b_1^2} + \frac{\operatorname{Re}^2 \mathbf{E}_y}{b_2^2} = 1,$$

wir sprechen von einer *elliptisch polarisierten Welle*.

## 20. Lösung der Wellengleichung mittels FOURIER-Transformation

Die Wellengleichung in relativistisch kovarianter Form

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (1)$$

in LORENTZ-Eichung

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

wollen wir in diesem Kapitel mittels der Methode der FOURIER-Transformation sowie der Funktionentheorie lösen.

Wir gehen wie schon öfters praktiziert vor, benutzen die GREENSche Funktion, die durch die Gleichung

$$\square D(x) = \delta^4(x) \equiv \delta(x^0)\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3). \quad (2)$$

definiert sei. Dabei stehe die Variable  $x$  für die Gesamtheit der  $x^\mu$ . Offenbar gilt dann

$$\square_x D(x - x') = \delta^4(x - x').$$

Ist  $A^{0\mu}$  eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung, so haben wir durch

$$A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} \int D(x - x') j^\mu(x') d^4 x' + A^{0\mu}(x) \quad (3)$$

die Gesamtheit der Lösungen von (1) vorliegen. Dies zeigt man leicht, es ist

$$\begin{aligned} \square_x A^\mu(x) &= \frac{4\pi}{c} \int \square_x D(x - x') j^\mu(x') d^4 x' + \square_x A^{0\mu}(x) \\ &= \frac{4\pi}{c} \int \delta^4(x - x') j^\mu(x') d^4 x' = \frac{4\pi}{c} j^\mu(x). \end{aligned}$$

Unsere Aufgabe ist damit gelöst, wenn uns die GREENSche Funktion  $D(x)$  von (1) bekannt ist. Um diese zu berechnen, benutzen wir — wie schon angekündigt — die Methode der FOURIER-Transformation, transformieren also (2) in Raum und Zeit. Wir erinnern uns an die Darstellung der  $\delta$ -Funktion

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ikx} dk,$$

um  $\delta^4(x)$  mit  $k \cdot x := k_0 x^0 + \dots + k_3 x^3$  in der Form

$$\delta^4(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ik \cdot x} d^4 k \quad (4)$$

darzustellen. Die GREENSche Funktion und ihre in Raum und Zeit FOURIER-Transformierte hängen durch

$$D(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{D}(k) e^{-ik \cdot x} d^4 k \quad (5)$$

zusammen. Damit wird (2) zu

$$\int \left( (2\pi)^2 \tilde{D}(k) \square e^{-ik \cdot x} - e^{-ik \cdot x} \right) d^4 k = 0.$$

Der Integrand muß also Null sein, da uns die Umkehrtransformation lehrt, daß der Integrand die Transformierte von Null ist. Nach Ausführung der Differentiation bleibt

$$(-k_0^2 + \kappa^2) \tilde{D}(k) = \frac{1}{(2\pi)^2},$$

wobei

$$\kappa^2 \equiv \mathbf{k}^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2.$$

Die FOURIER-Transformierte von (2) ist also

$$\tilde{D}(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\kappa^2 - k_0^2}. \quad (6)$$

Durch Rücktransformation wollen wir daraus  $D(x)$  berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} D(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \tilde{D}(k) e^{-ik \cdot x} d^4 k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \int \frac{e^{-ik_0 x^0}}{\kappa^2 - k_0^2} dk_0 d^3 k. \end{aligned} \quad (7)$$

Zur Berechnung von (7) beginnen wir mit dem Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik_0 x^0}}{\kappa^2 - k_0^2} dk_0. \quad (8)$$

Der Integrand hat Singularitäten bei  $\pm\kappa$ . Wir lösen das Integral durch Wegintegration in der komplexen  $k_0$ -Ebene. Dazu betrachten wir den Integrationsweg in Abb. 20.1. Er besteht aus der reellen Achse und einem Halbkreis im Unendlichen in der oberen Halbebene; bezeichnen wir einen Halbkreis um 0 mit Radius  $r$  in der OHE mit  $C_r^+$ , so ist  $C_\infty^+$  ein Teil des Integrationsweges. Nach dem Residuensatz ist

$$\int_{C_\infty^+ \cup \mathbf{R}} \frac{e^{-ik_0 x^0}}{\kappa^2 - k_0^2} dk_0 = 2\pi i \sum \text{Residuen}. \quad (9)$$

Wegen

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r^+} \frac{e^{-ik_0 x^0}}{\kappa^2 - k_0^2} dk_0 \right| &= \left| \int_{C_r^+} \frac{e^{-ix^0 \operatorname{Re} k_0} e^{x^0 \operatorname{Im} k_0}}{\kappa^2 - k_0^2} dk_0 \right| \\ &\leq \pi r \frac{e^{x^0 \operatorname{Im} k_0}}{\kappa^2 - r^2} \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (10)$$

und der Nichtnegativität von  $\operatorname{Im} k_0$  verschwindet das Integral entlang  $C_\infty^+$ , falls nur  $x^0 < 0$  ist, denn damit bleibt  $e^{x^0 \operatorname{Im} k_0} \leq 1$ . Ist  $x^0 > 0$ , so wählen wir den Integrationsweg entlang  $C_\infty^- \cup \mathbf{R}$  in Abb. 20.2. Auch in diesem Falle verschwindet das Integral über den Halbkreis — jetzt der Halbkreis in der unteren Halbebene —, denn mit  $x^0 > 0$  und  $\operatorname{Im} k_0 < 0$  ist  $e^{x^0 \operatorname{Im} k_0} \leq 1$  auf  $C_\infty^-$ .

Die Berechnung des Integrals (8) führen wir hier für den Fall  $x^0 > 0$  aus. Für  $x^0 < 0$  geht das analog.

Mit

$$\operatorname{Res}_{k_0=-\kappa} \frac{e^{-ik_0 x^0}}{-(k_0 - \kappa)(k_0 + \kappa)} = \frac{e^{i\kappa x^0}}{2\kappa} \quad (11)$$

und

$$\operatorname{Res}_{k_0=\kappa} \frac{e^{-ik_0 x^0}}{-(k_0 - \kappa)(k_0 + \kappa)} = -\frac{e^{-i\kappa x^0}}{2\kappa} \quad (12)$$

wird wegen (9) und (10) unter Berücksichtigung, daß der Integrationsweg  $\mathbf{R} \cup C_\infty^-$  negativ orientiert ist,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik_0 x^0}}{\kappa^2 - k_0^2} dk_0 &= -\frac{\pi i}{\kappa} (e^{i\kappa x^0} - e^{-i\kappa x^0}) \\ &= \frac{2\pi}{\kappa} \sin \kappa x^0. \end{aligned} \quad (13)$$

Mit (7) fortfahrend ist damit

$$D(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \frac{\sin \kappa x^0}{\kappa} d^3 k. \quad (14)$$

Die Einführung eines kartesischen Koordinatensystemes so, daß die  $z$ -Achse parallel zu  $\mathbf{x}$  zu liegen kommt, liefert unter Verwendung von Kugelkoordinaten die Substitution  $\mathbf{k}\mathbf{x} = \kappa |\mathbf{x}| \sin \vartheta$  und  $d^3 k =$

$\kappa^2 \cos \vartheta d\varphi d\vartheta d\kappa$ , womit (14) zu

$$\begin{aligned}
D(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-i\kappa|\mathbf{x}|\sin\vartheta} \kappa \cos\vartheta \sin\kappa x^0 d\vartheta d\kappa \\
&= \frac{i}{(2\pi)^2 |\mathbf{x}|} \int_0^\infty \left| e^{-i\kappa|\mathbf{x}|\sin\vartheta} \right|_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\kappa x^0 d\kappa \\
&= \frac{i}{(2\pi)^2 |\mathbf{x}|} \int_0^\infty \left( e^{-i\kappa|\mathbf{x}|} - e^{i\kappa|\mathbf{x}|} \right) \frac{1}{2i} \left( e^{\kappa x^0} - e^{-i\kappa x^0} \right) d\kappa \\
&= \frac{1}{8\pi^2 |\mathbf{x}|} \int_0^\infty \left( e^{i\kappa(x^0 - |\mathbf{x}|)} - e^{-i\kappa(x^0 + |\mathbf{x}|)} - e^{i\kappa(x^0 + |\mathbf{x}|)} + e^{-i\kappa(x^0 - |\mathbf{x}|)} \right) d\kappa \\
&= \frac{1}{8\pi^2 |\mathbf{x}|} \int_{-\infty}^\infty \left( e^{i\kappa(x^0 - |\mathbf{x}|)} - e^{i\kappa(x^0 + |\mathbf{x}|)} \right) d\kappa \\
&= \frac{1}{4\pi |\mathbf{x}|} (\delta(x^0 - |\mathbf{x}|) - \delta(x^0 + |\mathbf{x}|))
\end{aligned}$$

wird. Da wir  $x^0 > 0$  vorausgesetzt haben, ist  $\delta(x^0 + |\mathbf{x}|) \equiv 0$ , die *retardierte* GREENSche Funktion  $D_{\text{ret}}(x)$  des D'ALEMBERT-Operators lautet also

$$D_{\text{ret}}(x) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x}|} \delta(x^0 - |\mathbf{x}|), \quad (15)$$

oder — nach Vornahme der Rücksubstitution —

$$D_{\text{ret}} = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta((x^0 - x'^0) - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|). \quad (16)$$

In (3) eingesetzt, erhält man

$$A^\mu(x) = \frac{1}{c} \int \frac{j^\mu(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta(x^0 - x'^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) d^4x', \quad (17)$$

was nach Integration über  $x'^0$  zu

$$A^\mu(x) = \frac{1}{c} \int \frac{j^\mu(x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (18)$$

wird. Durch Addition der allgemeinen Lösung  $A^{0\mu}(x)$  der homogenen Gleichung  $\square A^{0\mu}(x) = 0$  erhalten wir aus (18) die allgemeine Lösung der Wellengleichung (1).

An dieser Stelle ist noch die Diskussion einer wichtigen Eigenschaft von (18) angebracht. Um an einem Raumpunkt  $\mathbf{x}$  das Viererpotential aus dem Viererstrom nach (18) zu berechnen, brauchen wir nur den Viererstrom auf dem in der Vergangenheit liegenden Lichtkegel von  $\mathbf{x}$  zu kennen,  $x'^0 = x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  ist die Gleichung von diesem. Durch diese sog. *Retardierung* in (18) manifestiert sich also die Nahewirkung: Die Wirkung breitet sich nicht Augenblicklich, sondern mit endlicher Geschwindigkeit aus. In einem der ersten Kapitel haben wir die Elektrostatik besprochen, welche einen zeitunabhängigen Problemkreis behandelt; genauso verhält es sich mit der Magnetostatik. Die dort gefundenen Lösungen der — spezialisierten — Feldgleichungen können wir leicht aus (18) herauskristallisieren.

Wir setzen Zeitunabhängigkeit — oder, mit anderen Worten, Symmetrie unter Zeittranslation — bei den vorkommenden Raumzeitfunktionen voraus.

Für die Elektrostatik wählt man aus (1) die Gleichung mit  $\mu = 0$ , welche mit  $A^0 \equiv \varphi$  und  $j^0 \equiv c\rho$  sich in der POISSON-Gleichung der Elektrostatik

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \quad (19)$$

offenbart. Es sei bemerkt, daß bei gewählter LORENTZ-Eichung und Zeitunabhängigkeit der Felder diese — automatisch — COULOMB-geeicht sind, denn die Zeitunabhängigkeit macht aus  $\frac{1}{c}\partial_t\varphi + \text{div}\mathbf{A} = 0$  die Forderung  $\text{div}\mathbf{A} = 0$ .

Auch in (18) wählen wir die Komponente mit  $\mu = 0$ . Da  $\varrho(x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}') = \varrho(x^0, \mathbf{x}')$  — wegen der Zeittranslationssymmetrie — erhalten wir das erwartete Resultat

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{\varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x'. \quad (20)$$

Für die Magnetostatik erhält man als Lösung von

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (21)$$

die Integralformel

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x', \quad (22)$$

welche, was angemerkt sei, mittels  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$  in eine Integralformel zur Berechnung von  $\mathbf{H}$  aus  $\mathbf{j}$  — dem Gesetz von BIOT-SAVART — übergeht.

Diese Formeln lassen die Retardierung vermissen — man hat den Eindruck einer Fernwirkung, einer instantanen Ausbreitung der Wirkung —, was aber, wie die Spezialisierung aus (18) zeigt, ein Trugschluß ist.

## 21. Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen

Wir geben uns in diesem Kapitel ein Feld  $j^\mu$  vor — das außerhalb einer Kugel mit Radius  $R$  verschwinden soll —, mit dem Ziel, das Feld  $A^\mu$ , das dadurch erzeugt wird — zumindest näherungsweise — zu berechnen. Im vorigen Kapitel wurde dazu die Lösung

$$A^\mu(x) = \frac{1}{c} \int \frac{j^\mu(x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \quad (1)$$

der Wellengleichung

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (2)$$

in LORENTZ-Eichung

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (3)$$

hergeleitet.

Sei also  $j^\mu(x^0, \mathbf{x}') \equiv 0 \quad \forall \mathbf{x}' \notin K_R$ . Der Aufpunkt  $\mathbf{x}$ , an dem wir das Vektorfeld des Vierpotentials berechnen wollen, sei weit außerhalb dieser Kugel, d.h. es gelte  $|\mathbf{x}| \gg R \geq |\mathbf{x}'|$ . Mit  $r \equiv |\mathbf{x}|$  und  $\hat{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$  ist dann

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| &= \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2} \\ &= r \sqrt{1 - 2\hat{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{x}'}{r} + \frac{|\mathbf{x}'|^2}{r^2}} \\ &= r \left(1 - \hat{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{x}'}{r} + \dots\right) \\ &\approx r - \hat{\mathbf{x}} \mathbf{x}', \end{aligned}$$

womit in diesem Falle (1) durch

$$A^\mu(x) = \frac{1}{c} \int \frac{j^\mu(x^0 - r + \hat{\mathbf{x}} \mathbf{x}', \mathbf{x}')}{r - \hat{\mathbf{x}} \mathbf{x}'} d^3 x'$$

genähert werden kann. Auch diese Näherung soll noch weiter vereinfacht werden. Aus der Tatsache, daß  $\hat{\mathbf{x}} \mathbf{x}'$  im Nenner gegen  $r$  vernachlässigt werden kann, folgt der Ausdruck

$$A^\mu(x) = \frac{1}{c|\mathbf{x}|} \int j^\mu(x^0 - |\mathbf{x}| + \hat{\mathbf{x}} \mathbf{x}', \mathbf{x}') d^3 x', \quad (4)$$

der im Folgenden verwendet werden soll. Wir erinnern uns, daß  $|\mathbf{x}| \gg R$  vorausgesetzt wurde; man spricht von der *Fernzone*.

Mit dem jetzt durch (4) gegebenen  $A^\mu(x)$  kann das Interesse nach den elektromagnetischen Feldern befriedigt werden. Es ist  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ ; unter Beachtung von  $\text{rot } \varphi \mathbf{a} = \varphi \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \text{grad } \varphi$  wird damit

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{c|\mathbf{x}|} \text{rot} \int \mathbf{j}(x^0 - |\mathbf{x}| + \hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}', \mathbf{x}') d^3x' - |\mathbf{x}| \mathbf{A}(x^0, \mathbf{x}) \times \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \\ &= \frac{1}{c|\mathbf{x}|} \int \text{rot} \mathbf{j}(x^0 - |\mathbf{x}| + \hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}', \mathbf{x}') d^3x' + |\mathbf{x}| \mathbf{A}(x^0, \mathbf{x}) \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}. \end{aligned} \quad (5)$$

Die Rotation berechnet sich zu

$$\begin{aligned} (\text{rot } \mathbf{j})_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j \mathbf{j}_k = \varepsilon_{ijk} \partial_0 \mathbf{j}_k \cdot \partial_j (x^0 - |\mathbf{x}| + \hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}') \\ &= \varepsilon_{ijk} (\text{grad}(x^0 - |\mathbf{x}| + \hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}'))_j (\partial_0 \mathbf{j})_k \\ &= (\text{grad}(x^0 - |\mathbf{x}| + \hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}') \times (\partial_0 \mathbf{j}))_i, \end{aligned}$$

was wegen

$$\text{grad}(x^0 - |\mathbf{x}| + \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \mathbf{x}') = -\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{x}' - \hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}|} \approx -\hat{\mathbf{x}}$$

in der Form

$$\text{rot } \mathbf{j} = (\partial_0 \mathbf{j}) \times \hat{\mathbf{x}}$$

geschrieben werden kann. In (5) eingesetzt, wird

$$\mathbf{H} = (\partial_0 \mathbf{A}) \times \hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{x}}, \quad (6)$$

falls man den 2. Summanden in (5) wegläßt, was sich dadurch rechtfertigt, daß er  $\propto 1/r^2$  ist. Da diese Betrachtungen sowieso nur in genügend großer Entfernung von der Quelle gilt, haben wir näherungsweise ebene Wellen, für welche in Kapitel 18 (Formel 18(10)) die Beziehung

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{x}}$$

hergeleitet wurde. Damit ist wegen (6)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c} (\partial_t \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{x}}) \times \hat{\mathbf{x}}. \quad (7)$$

Dies fordert auch schon die gewählte LORENTZ-Eichung (3), wie folgende kleine Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} \\ &= -\frac{1}{c} (\partial_t \phi) \hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} \\ &= (\text{div } \mathbf{A}) \hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}^2 \\ &= \frac{1}{c} (\hat{\mathbf{x}} \partial_t \mathbf{A}) \hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}^2 \\ &= \frac{1}{c} (\partial_t \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{x}}) \times \hat{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Dabei wurde der Operator grad der 0-ten Komponente der Gleichung (4) berechnet, welcher  $\text{grad } \phi = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{x}} \partial_t \phi$  liefert; Anwendung der LORENTZ-Eichung und die Divergenz von (4) in der Form  $\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{x}} \partial_t \mathbf{A}$  führen dann auf das Ergebnis.

Mit (6) und 18(10) erhalten wir den POYNTING-Vektor

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{x}}) \times \mathbf{H} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{H}^2 \hat{\mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{4\pi c} (\partial_t \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{x}})^2 \hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{4\pi c} [(\partial_t \mathbf{A})^2 - (\hat{\mathbf{x}} \partial_t \mathbf{A})^2] \hat{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man  $dI$  die Intensität bzw. den Energiestrom der durch das Flächenelement  $dF = r^2 d\Omega$  strömt, so wird

$$\begin{aligned} dI &= |\mathbf{S}| dF = |\mathbf{S}| r^2 d\Omega \\ &= \frac{r^2}{4\pi c} [(\partial_t \mathbf{A})^2 - (\hat{\mathbf{x}} \partial_t \mathbf{A})^2] d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi c^3} \left( \left( \int \partial_t \mathbf{j} d^3x' \right)^2 - \left( \int \hat{\mathbf{x}} \partial_t \mathbf{j} d^3x' \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Damit ein System Energie abstrahlen kann, muß also ein sich ändernder Strom vorhanden sein.

Diese Ergebnisse spezialisieren wir nun für einen Dipol. Mit  $\mathbf{j} = \varrho \mathbf{v}$  wird wegen (4)

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cr} \cdot \int \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3x' = \frac{1}{cr} \cdot \sum_i q_i \mathbf{v}_i,$$

wobei die Retardierung vernachlässigt wurde. Wegen

$$\mathbf{d} = \sum_i q_i \mathbf{x}_i \tag{8}$$

ist

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cr} \dot{\mathbf{d}},$$

womit

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \hat{\mathbf{x}}}{r} \tag{9}$$

und

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{(\ddot{\mathbf{d}} \times \hat{\mathbf{x}}) \times \hat{\mathbf{x}}}{r} \tag{10}$$

wird. Ladungen strahlen also nur, wenn sie beschleunigt werden. Den POYNTING-Vektor erhält man zu

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{H}^2 \hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{4\pi c^3} \frac{(\ddot{\mathbf{d}} \times \hat{\mathbf{x}})^2}{r^2} \hat{\mathbf{x}},$$

was mit  $\vartheta = \angle(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{d})$  zu

$$|\mathbf{S}| = \frac{1}{4\pi c^3} \frac{|\ddot{\mathbf{d}}|^2 \sin^2 \vartheta}{r^2}$$

wird.

Bei einem abgeschlossenen System von Ladungsträgern ist

$$\mathbf{d} = \sum_i \frac{q_i}{m_i} m_i \mathbf{r}_i.$$

Unabhängigkeit des Quotienten  $q_i/m_i$  von dem einzelnen Ladungsträger vereinfacht diese Gleichung zu

$$\mathbf{d} = \frac{q}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \frac{q}{m} \mathbf{R}_S,$$

wobei  $\mathbf{R}_S$  der Schwerpunktsvektor ist. Benutzt man nun den Satz von der Erhaltung der Schwerpunkts­geschwindigkeit, so sieht man, daß die für die Strahlung maßgebende zweite Zeitableitung von  $\mathbf{d}$  verschwindet. Dies bedeutet, daß ein sich selbst überlassenes Elektronengas keine Dipolstrahlung emittiert.