

Demonstration der Effekte der Speziellen Relativitätstheorie durch geometrische Konstruktion

Dr. Thomas Strohm
www.thomas-strohm.de

Zusammenfassung

Im vorliegenden Artikel werden die wichtigsten Aussagen Einsteins Spezieller Relativitätstheorie (SRT) durch geometrische Konstruktion hergeleitet. Damit wird ein Zugang zur SRT fast ganz ohne mathematische Formeln möglich. Außerdem bietet die Methode einen neuen Blickwinkel für schon in die SRT eingeweihte.

Einleitung

Die Spezielle Relativitätstheorie (SRT) beschäftigt sich ganz allgemein mit den physikalischen Aspekten von Raum und Zeit. Sie legt damit eine Grundlage für die anderen physikalischen Theorien. Historisch hat die SRT die damals vorherrschenden und hauptsächlich von Newton stammenden Vorstellungen von Raum und Zeit revolutioniert. In Folge mußte die Newtonsche Mechanik überholt werden, was im Rahmen der Relativitätstheorie geschehen ist. Auch die damals noch junge Quantenmechanik mußte auf die neuen Grundlagen angepasst werden. Lediglich Maxwells Elektrodynamik hat die Umwälzungen ohne Änderungen überstanden.

Die Spezielle Relativitätstheorie beschreibt *physikalische Vorgänge in Inertialsystemen*. Ein *Inertialsystem* (IS) ist ein Bezugssystem, in dem das *Newtonsche Trägheitsgesetz* gilt. Dieses besagt, daß sich ein Körper, auf den keine Kraft wirkt, *geradlinig gleichförmig*¹ bewegt. Als Konsequenz bewegen sich zwei Inertialsysteme relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit.

Ein antriebslos weit weg von Massen im Weltall fliegendes Raumschiff ist ein Beispiel für ein Inertialsystem. Experimente in diesem Raumschiff zeigen, daß kräfteleose Körper sich geradlinig gleichförmig bewegen.² Auch ein Labor auf der Erde ist ein IS. Allerdings muß man dann den Einfluß der Erde auf das Experiment berücksichtigen und die Erdanziehungskraft sowie Trägheitskräfte³ "herausrechnen".

Die *Physik in ISen* ist ein weites Feld. Wir werden uns hier nur mit der Kinematik und Elementarem aus der Dynamik von Massenpunkten befassen. Die älteste physikalische Theorie, die mit den Aussagen der Speziellen Relativitätstheorie zusammenpasst, die Maxwellsche Elektrodynamik, muß leider aussen vor bleiben.

¹d.h. mit nach Betrag und Richtung konstanter Geschwindigkeit

²Um genau zu sein, muß man definieren, was die Begriffe "kräfteleose" und "geradlinig gleichförmig" bedeuten. Den zweiten Begriff kann man nur unter Zuhilfenahme eines rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystemes und einer Uhr beurteilen

³z.B. die Corioliskraft

Prinzipien der Speziellen Relativitätstheorie

Im Zentrum der SRT stehen zwei grundlegende Prinzipien, die wie Axiome den logischen Aufbau der Theorie stützen. Das erste ist das

- (I) *Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:* Licht bewegt sich in jedem Inertialsystem mit der Lichtgeschwindigkeit c .

Um das zu verdeutlichen (siehe Abb. 1): ein Beobachter B sitzt in einem sich kräftefrei bewegenden Raumschiff im Weltall (das Inertialsystem I_B) und schickt einen Lichtblitz in eine Raumrichtung los. Eine im Inertialsystem I_B durchgeführte Geschwindigkeitsmessung ergibt die Lichtgeschwindigkeit c . Im Moment, in dem der Lichtblitz losgeschickt wird, fliegt ein Raumschiff mit dem Beobachter B' (Inertialsystem I'_B) mit konstanter Geschwindigkeit von $c/2$ in der Richtung des Lichtblitzes an Beobachter B vorbei. Der Insasse B' des vorbeifliegenden Raumschiffs misst die Ausbreitungsgeschwindigkeit des von B ausgesandten Lichtblitzes. *Er erhält ebenfalls die Lichtgeschwindigkeit c !*

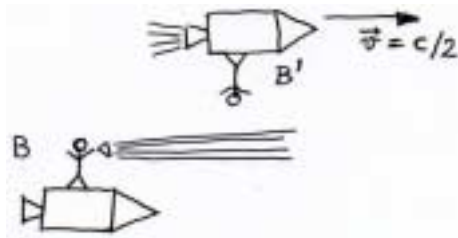


Abbildung 1: Zum Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit (siehe Text)

Dies ist eine bemerkenswerte Feststellung. Nach der klassischen, Newtonschen Mechanik sollte vom bewegten Raumschiff aus die Geschwindigkeit des Lichtblitzes zu $c/2$ gemessen werden. Dies ist jedoch nicht so. Getreu dem Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit resultiert c als Geschwindigkeit. Das Prinzip wurde in zahlreichen Experimenten in großer Genauigkeit bestätigt (zur klassischen Theorie der Lichtausbreitung und dem epochemachenden, diese Vorstellung widerlegenden Experiment, siehe Anhang A).

Das zweite grundlegende Prinzip der SRT handelt von der

- (II) *Gleichwertigkeit von Inertialsystemen:* Die physikalischen Gesetze sehen in allen Inertialsystemen gleich aus.

Mit anderen Worten heißt das, daß es kein Inertialsystem gibt, das vor einem anderen ausgezeichnet wäre. Macht man Experimente in einem Raumschiff, egal ob dieses sich im Weltall weitab von den nächsten Massen befindet oder sich wie ein Satellit um die Erde dreht, die Ergebnisse werden dieselben sein.⁴

⁴Das ist natürlich eine Idealisierung, denn das Schwerfeld der Erde ist innerhalb des erdnahen Satelliten nicht ganz genau homogen.

Koordinatensysteme und Relativität der Gleichzeitigkeit⁵

Zur geometrischen Herleitung der Effekte der SRT betrachten wir wieder die zwei Beobachter B und B' , von denen jeder in einem Inertialsystem ruht und welche sich relativ zueinander mit der Geschwindigkeit v bewegen. Der Beobachter B misst Längen und Zeiten in einem Koordinatensystem (KS) K mit der Raumkoordinate⁶ x und der Zeit t . Die Zeitkoordinate multiplizieren wir noch mit c und nennen sie $\tau \equiv ct$ (damit wird die Zeit in Metern gemessen!). In dieser Einheit wird die Relativgeschwindigkeit der Beobachter durch $\beta = v/c$ ausgedrückt,⁷ denn $vt = \beta\tau$. Man erhält das schwarze KS in Abb. 2.

Der von dem x - τ -Koordinatensystem aufgespannte Raum heißt *Raumzeit* (oder *Welt*). Ein Punkt in der Raumzeit heißt *Ereignis* (oder *Weltpunkt*). Ein Punkt im Raum entspricht einer Linie (einer *Weltlinie*) in der Raumzeit, dasselbe gilt für einen bestimmter Zeitpunkt.

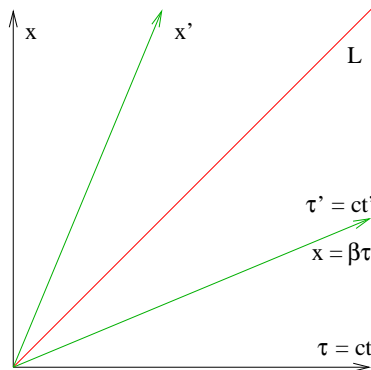


Abbildung 2: Konstruktion der Achsen des Koordinatensystems des Beobachters B' aus der Sicht des Beobachters B

Der Beobachter B' richtet sich in seinem Inertialsystem ebenfalls ein Koordinatensystem, das KS K' ein, seine Koordinaten wollen wir mit x' und τ' bezeichnen. Das KS K' soll sich bzgl. des KS K so bewegen, daß der Ursprung des KS K' zur Zeit $\tau = 0$ mit dem Ursprung des KS K zusammenfällt. Unser Ziel ist es, herauszufinden, wie die Koordinatenachsen des KS K' des Beobachters B' im KS K erscheinen.

Die Bewegung des Ursprungs des KS K' (die Weltlinie des Koordinatenursprungs) wird im KS K des Beobachters B durch die Linie $x = \beta\tau$ repräsentiert. Diese Linie ist die τ' -Achse, auf ihr gilt $x' = 0$.

Fehlt uns noch die x' -Achse. Der Beobachter B sende im Ursprung seines KS einen Lichtblitz in positive x -Richtung aus. Die Weltlinie des Lichtblitzes ist durch

⁵Wir nehmen hier an, daß der Raum euklidisch (d.h. nicht gekrümmt) ist, und ein orthonormales räumliches Koordinatensystem sowie eine gleichförmig laufende Uhr vorliegen

⁶wir betrachten im Moment nur eine Raumdimension

⁷ β bezeichnet eine Geschwindigkeit, gemessen in der Einheit der Lichtgeschwindigkeit

$x = ct = \tau$ gegeben. Sie entspricht also der Winkelhalbierenden⁸ zwischen der x -Achse und der τ -Achse und ist in der Abbildung durch die rote mit L bezeichnete Weltlinie dargestellt.

Der Lichtblitz breitet sich natürlich auch in negative x -Richtung bzw. in alle Raumrichtungen aus. Betrachtet man zwei Raumdimensionen so ist die Raumzeit dreidimensional und die Weltlinie wird zu einem Kegel (siehe Abb. 3). Daher stammt der Begriff *Lichtkegel*, der auch in einer zwei- oder vierdimensionalen Raumzeit verwendet wird.

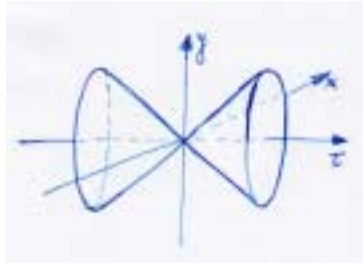


Abbildung 3: Lichtkegel in der 3-dimensionalen Raumzeit

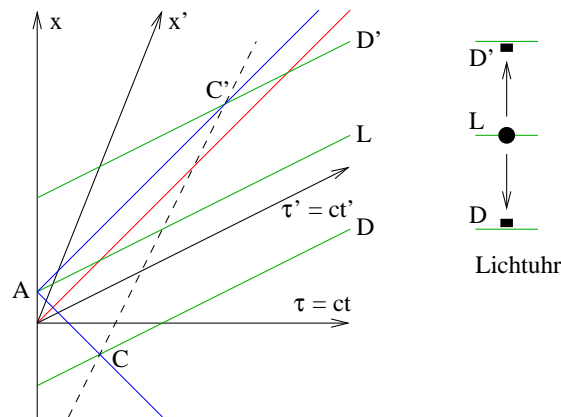


Abbildung 4: Konstruktion von Gleichzeitigkeit mittels einer Lichtuhr

Die Weltlinie des Lichtimpulses muß wegen der Gleichwertigkeit der Inertialsysteme auch im Koordinatensystem $KS K'$ die Winkelhalbierende bilden. Daraus bestimmt man leicht die Lage der x' -Achse, nämlich durch Spiegelung der τ' -Achse an der Lichtlinie $x = \tau$ (wir werden weiter unten noch ein weiteres Verfahren zur Konstruktion der x' -Achse kennenlernen).

Man erkennt hier schon eine wichtige Aussage der SRT, die

⁸aus diesem Grunde haben wir als Einheit auf der Zeitachse nicht t , sondern $\tau \equiv ct$ verwendet

Relativität der Gleichzeitigkeit: Gleichzeitigkeit ist relativ. Ereignisse, die für einen Beobachter gleichzeitig sind, müssen das für einen anderen nicht sein.

Zwei Ereignisse, die für den Beobachter B gleichzeitig sind, liegen entweder beide auf der x -Achse oder ihre Verbindungsgerade in der Raumzeit ist parallel zur x -Achse. Für den Beobachter B' sind zwei Ereignisse dann gleichzeitig, wenn ihre Verbindungsgerade parallel zur x' -Achse ist.

Die Relativität der Gleichzeitigkeit in der SRT steht in grossem Gegensatz zur Behandlung der Zeit bei Newton. Für Newton war die Zeit absolut, damit auch die Gleichzeitigkeit. Zwei Ereignisse sind in der Newtonschen Physik entweder gleichzeitig oder eben nicht. Und das unabhängig vom Beobachter. Läßt man die obige Argumentationskette nochmals Retrospektive passieren, wird klar, wie die Relativität der Gleichzeitigkeit notwendig eine direkte Konsequenz der Forderung nach Gleichheit der Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen ist.

Wir geben wie angekündigt noch einen anderen Weg an, um die Lage der x' -Achse zu ermitteln. Um das zu tun, ist zunächst der Begriff der Gleichzeitigkeit zu definieren. Dazu verwenden wir eine *Lichtuhr* (siehe Abb. 4 rechts). Eine solche besteht aus einem Lichtsender L und zwei von diesem gleich weit entfernten, jedoch in entgegengesetzter Richtung liegenden Detektoren D und D' . Man schickt nun einen Lichtblitz von L in alle Raumrichtungen ab. Dieser trifft (per definitionem) *gleichzeitig* bei den Detektoren D und D' ein. Zwei gegebene Ereignisse, sind in einem IS I genau dann gleichzeitig, wenn sich eine im IS I ruhende Lichtuhr konstruieren läßt, sodaß das Eintreffen der Lichtblitze bei den Detektoren mit den zwei vorgegebenen Ereignissen zusammenfällt.

Betrachten wir die Situation im Raumzeit-Diagramm (Abb. 4). Der Beobachter B' führt die Lichtuhr mit sich. Dies ist durch die Weltlinien des Lichtsenders und der Detektoren, bezeichnet durch L , D und D' , skizziert. Im Weltpunkt A wird dann der Lichtblitz losgeschickt. Die blauen Linien sind die Weltlinien der in die Richtung der zwei Detektoren laufenden Lichtblitze. In den Weltpunkten C und C' trifft der Lichtblitz bei den Detektoren ein. Diese Ereignisse sind für den Beobachter B' gleichzeitig. Die Verbindungsgerade ist eine Gerade konstanter Zeit. Diese muß jetzt nur noch in den Ursprung parallelverschoben werden und stellt dann die gesuchte x' -Achse dar.

Zusammenfassung:

- Gegeben ist die τ' -Achse im x - τ -Koordinatensystem. Dann erhält man die x' -Achse durch Spiegelung der τ' -Achse an der Lichtlinie $x = \tau$.
- Gleichzeitigkeit ist relativ. Zwei Ereignisse, die in einem IS gleichzeitig sind, sind das in einem dazu bewegten IS nicht.

Die Ereignisse C und C' sind also für den Beobachter B' gleichzeitig, nicht aber für den Beobachter B . Dies ist ein Beispiel der *Relativität der Gleichzeitigkeit*.

In Abb. 5 ist die Raumzeit durch Lichtkegel in 3 Bereiche aufgeteilt. Im Bezug auf das Ereignis im Ursprung

- liegen Ereignisse im Bereich I in der Zukunft,

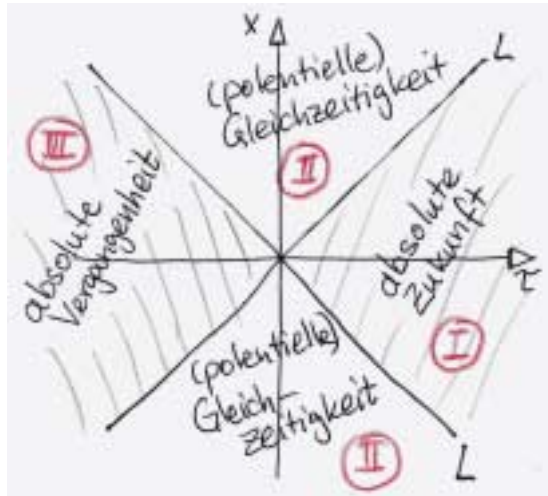


Abbildung 5: Der Lichtkegel L teilt die Raumzeit in Bereiche mit Ereignissen ein, die möglicherweise gleichzeitig zum Ereignis im Ursprung sind, solche die die Vergangenheit und solche, die die Zukunft des Ereignisses im Ursprung bilden

- können Ereignisse im Bereich II gleichzeitig stattfinden oder in Zukunft oder Vergangenheit liegen (abhängig vom Bezugssystem, von dem aus beobachtet wird) und
- liegen Ereignisse im Bereich II in der Vergangenheit.

Die Lorentz-Transformation

In diesem Abschnitt, der für das Verständnis der weiteren Abschnitte nicht relevant ist (und deshalb übersprungen werden kann), bringen wir etwas Mathematik. Dies wird zum einen mehr Klarheit in die logische Struktur von Raum und Zeit in der SRT bringen und zum anderen die Einfachheit und Symmetrie der Mathematik der SRT aufzeigen.

Die *Lorentz-Transformation* ordnet den Koordinaten eines Ereignisses im x - τ -Koordinatensystem diejenigen desselben Ereignisses im x' - τ' -KS zu (bzw. umgekehrt). Die Transformation ist linear,⁹ wir können also allgemein schreiben

$$\begin{aligned}\tau' &= a_{00}\tau + a_{01}x \\ x' &= a_{10}\tau + a_{11}x,\end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten a_{ij} zu bestimmen sind. Die Berücksichtigung der zwei Bedingungen

⁹Dies ist der Fall, weil sie geradlinig gleichförmige Bewegungen auf ebensolche abbilden muß. Zwei Inertialsysteme bewegen sich geradlinig gleichförmig zueinander.

(A) der Lichtkegel $x = \pm\tau$ muß auf $x' = \pm\tau'$ abgebildet werden (und umgekehrt)

(B) die Weltlinie $x = \beta\tau$ muß auf $x' = 0$ abgebildet werden (und umgekehrt)

führt ohne Umwege zur Form

$$\tau' = \alpha(\tau - \beta x) \quad (1)$$

$$x' = \alpha(x - \beta\tau) \quad (2)$$

der Transformation (es gilt wie bisher $\beta = v/c$).¹⁰ Offen ist noch die Bestimmung der Größe α , die die Streckung der Achsen bei der Transformation darstellt und nur von β abhängen kann.

Obige Darstellung (1), (2) erhält man folgendermaßen: Wir schreiben aus Bequemlichkeitsgründen die Lorentz-Transformation zunächst in Matrixform um, also in

$$\begin{pmatrix} \tau' \\ x' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \tau \\ x \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad L = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Aus der Forderung (A) nach ‘‘Erhalt des Lichtkegels’’

$$x = \pm\tau \quad \Leftrightarrow \quad x' = \pm\tau' \quad (4)$$

folgt die Form

$$L = \alpha \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

mit einer beliebigen Konstanten α und unbekanntem b . Die Relativgeschwindigkeit $\beta = v/c$ der Bezugssysteme hält über die Forderung (B)

$$x = \beta\tau \quad \Leftrightarrow \quad x' = 0 \quad (5)$$

Einzig in die Lorentz-Transformation. Daraus folgt dann $b = -\beta$, also

$$L(\beta) = \alpha(\beta) \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

was schon obige Aussage beweist.

Damit sind wir mit der algebraischen Herleitung gleich weit gelangt wie mit der geometrischen. Wir gehen hier gleich einen Schritt weiter und bestimmen α .

Eine Transformation in ein sich in x -Richtung mit der Geschwindigkeit β bewegendes KS geschieht also mit der Matrix $L(\beta)$. Von dort ‘‘zurück’’ geht es natürlich mit $L(-\beta)$. Insgesamt ist dann aber gar nichts geschehen, mit anderen Worten

$$L(-\beta)L(\beta) = 1,$$

Daraus folgt

$$\alpha(-\beta)\alpha(\beta)(1 - \beta^2) = 1.$$

¹⁰Damit wird auch automatisch die Weltlinie $x = \beta^{-1}\tau$ auf $\tau' = 0$ abgebildet.

Der Vorfaktor $\alpha(\beta)$ gibt die Streckung der Achsen bei der Transformation (3) an. Aus der obigen Gleichung läßt sich dieser Faktor nicht bestimmen, da nicht a priori klar ist, ob $\alpha(\beta) = \alpha(-\beta)$ gilt. Daß dem so ist, folgt aber aus der Gleichwertigkeit der Inertialsysteme und der Inversionssymmetrie des Raumes. Ob man in positive oder negative Raumrichtung transformiert, darf sich nicht in der Skalierung der Achsen niederschlagen. Also gilt $\alpha(\beta) = \alpha(-\beta)$ und damit folgt

$$\alpha(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Diese Größe α wird in der SRT gewöhnlich mit γ bezeichnet. Damit ist die Lorentz-Transformation hergeleitet, sie lautet¹¹

$$\begin{pmatrix} \tau' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ x \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (7)$$

Sämtliche kinematischen Effekte der SRT folgen aus (7).

Transformation von Längen

Setzen wir nach diesem Intermezzo unsere geometrische Herleitung fort. Wir wissen nun, wie die Linien fester Zeit (Gleichzeitigkeit) und festen Ortes des KS K' in unserem KS K dargestellt werden. Was wir noch nicht wissen, ist, wie die Skalen der Koordinatenachsen transformieren. Wir betrachten dazu Abb. 6.

Die Strecke \overline{OC} soll einen 1 Meter langen Maßstab zur Zeit $\tau = 0$ darstellen. Die Weltlinie des einen Endes wird durch die τ -Achse, die des anderen Endes durch die dazu parallele grüne Linie gebildet. Der Beobachter B' beobachtet den an ihm vorbeifliegenden Maßstab. Um dessen Länge zu messen, merkt er sich, wo sich beide Enden zur Zeit $\tau' = 0$ befinden. Es handelt sich um die Ereignisse A und den Ursprung. Er misst für die Länge des vorbeifliegenden Maßstabes also die Strecke vom Ursprung bis zum Punkt A . Ob das ebenso 1 Meter ist, können wir erst dann sagen, wenn wir die Skala auf der x' -Achse kennen.

Der Beobachter B' besitzt den gleichen Maßstab (ruhend im Bezug auf ihn). In seinem Inertialsystem wird dieser durch die Strecke vom Ursprung zum Raumzeit-Punkt B dargestellt. Wo auf der x' -Achse dieser Punkt genau liegt (ob er z.B. mit dem Punkt A zusammenfällt) wissen wir (noch) nicht, wir nehmen daher eine bestimmte Lage an. Die Weltlinien der Endpunkte des Maßstabes bilden die τ' -Achse und die blaue Linie. Misst nun Beobachter B die Länge dieses Maßstabes erhält er die Strecke vom Ursprung bis zum Raumzeit-Punkt D .

Wegen der Gleichwertigkeit der Inertialsysteme muß A näher am Ursprung als B und D näher am Ursprung als C liegen. Das ist eine interessante Beobachtung: Die

¹¹Anmerkung: Fordert man nicht nur die Erhaltung des Lichtkegels (4), also

$$x' - \tau'^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \tau^2 = 0,$$

sondern das viel weitergehende

$$x' - \tau'^2 = x^2 - \tau^2,$$

so ist α ohne obiges Zusatzargument durch die Gleichwertigkeit der Inertialsysteme gegeben. Andererseits folgt aus der Lorentz-Transformation die Invarianz von $x^2 - \tau^2$.

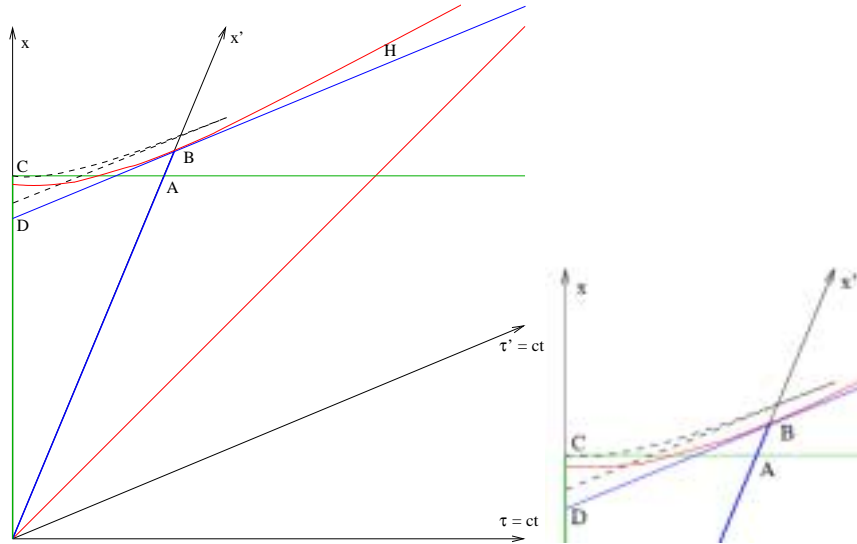


Abbildung 6: Längen von Maßstäben gemessen in Inertialsystemen, in denen sie nicht ruhen (rechts die Vergrößerung eines Ausschnittes der Figur links)

vom ruhenden Beobachter gemessene Länge des ruhenden Maßstabes ist \overline{OC} , die des bewegten Maßstabes \overline{OD} . Der ruhende Maßstab ist also länger als der bewegte. Vom Beobachter B' aus gesehen sieht das ähnlich aus: Der dort ruhende Maßstab hat die Länge \overline{OB} , der bewegte die Länge \overline{OA} . Auch für Beobachter B' ist also der ruhende Maßstab länger als der bewegte! Dies demonstriert das (scheinbare) Paradoxon der *Längenkontraktion*. Wir erkennen auch schnell, daß die Längenkontraktion letztendlich ein Effekt der Relativität der Gleichzeitigkeit ist.

Längenkontraktion: Wird ein Gegenstand bewegt, ist er kürzer (als ruhend).

Zusammenfassend rührt die Längenkontraktion also daher, daß wegen der Relativität der Gleichzeitigkeit der ruhende und der gegenüber dem Gegenstand bewegte Beobachter die unterschiedlichen Teile des Gegenstandes zu "unterschiedlichen Zeitpunkten" messen. Die Längenkontraktion ist ein rein kinematischer Effekt.

Aus den obigen Beobachtungen läßt sich der Faktor α in der Lorentz-Transformation geometrisch bestimmen. Wir beziehen uns weiterhin auf Abb. 6 und rechnen im KS K . Beispielsweise bezeichnen wir die im KS K gemessene räumliche Position des Ereignisses B mit x_B .

Der Faktor α der Lorentz-Transformation ist noch unbekannt. Wir wissen schon, daß er die Skalierung des Koordinatensystems bei der Transformation bestimmt. Insofern wissen wir nicht, welche Skala die gestrichenen Achsen in Abb. 6 haben. Mit anderen Worten: Wir können nicht die euklidische Geometrie benutzen, um in der Abbildung den Abstand \overline{OB} zu bestimmen. Was aber geometrisch gemacht werden kann,

ist die Berechnung des Verhältnisses von \overline{OB} zu \overline{OA} , dann kürzt sich nämlich der unbekannte Skalenfaktor heraus.

In der Abbildung ist x_C fest gegeben, damit auch x_A , denn $x_A = x_C$. Das Ereignis D haben wir an eine beliebige Stelle auf die x -Achse gelegt und diese im Nachhinein durch die Forderung $\overline{OC}/\overline{OD} = \overline{OB}/\overline{OA}$ festgelegt. Diese muß x_B liefern. Wir benötigen zunächst den Zusammenhang von x_B und x_D .

Die Gerade durch D und B ist durch $x = \beta^{-1}\tau + x_D$ gegeben, diejenige durch O und A durch $x = \beta^{-1}\tau$. Der Schnittpunkt ergibt $x_D = (1 - \beta^2)x_B$, also $x_B = \gamma^2 x_D$.

Nun hatten wir die Position der Geraden durch D und B durch die Forderung $x_B/x_A = x_C/x_D$ festgelegt. Daraus folgt $x_C = \gamma x_D$ und $x_B = \gamma x_A$, also $x_B = \gamma x_C$. Damit sind die x -Koordinaten aller Ereignisse als Funktion derer von C gegeben.

Wegen der Gleichwertigkeit der Inertialsysteme muß der im KS K gemessene Abstand von O und C gleich dem im KS K' gemessenen zwischen O und B sein, d.h. $x'_B = x_C$. Wegen $x_B = \gamma x_C$ folgt also die Forderung $x_B = \gamma x'_B$. Das bedeutet, daß die x' -Achse im Diagramm gegenüber der x -Achse um den Faktor γ^{-1} gestreckt ist. Wegen (7) gilt dasselbe auch für τ und τ' .

Jetzt müssen wir dies nur noch mit der Lorentz-Transformation vergleichen. Das Ereignis B hat in K' die Koordinaten x'_B und $\tau'_B = 0$. Aus der Lorentz-Transformation (von K' nach K) folgt

$$x_B = \alpha (x'_B - \beta \tau'_B) = \alpha x'_B ,$$

insgesamt gilt also $\alpha = \gamma$.

Damit haben wir die Form der Lorentz-Transformation rein geometrisch ermittelt.

Wir zeigen noch, daß C und B auf einer Hyperbel liegen. Es ist $x_B = \gamma x_C$ und $\tau_B = \beta \gamma x_C$ (wegen $x = \beta^{-1}\tau$). Eine Hyperbel hat die Form $x^2 = \tau^2 + a^2$, wobei a eine beliebige Konstante ist. Aus der Forderung, daß C auf der Hyperbel liegt, folgt $a = x_C$. Setzt man nun das Ereignis B , also x_B und τ_B in die Hyperbelgleichung ein, sieht man die Behauptung.

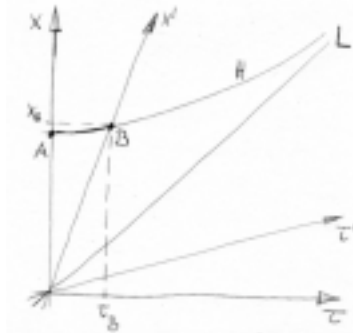


Abbildung 7: Die Hyperbeln $\tau^2 - x^2 = \text{const.}$ und die Skalierung der Achsen

Die Hyperbeln schneiden die x -Achsen also bei denselben Längen (vom Ursprung O aus gemessen). Dies sieht man folgendermaßen (siehe Abb. 7). Die Hyperbel durch den

Punkt A hat die Form $x^2 = x_A^2 + \tau^2$. Diese schneidet die x' -Achse im Punkt B , wobei $x_B = x_A / \sqrt{1 - \beta^2}$ und $\tau_B = \beta x_B$. Die Koordinaten des Punktes B im gestrichenen Koordinatensystem folgen mit der Lorentz-Transformation zu $x'_B = \gamma(x_B - \beta\tau_B) = x_A$ und $\tau'_B = (\tau_B - \beta x_B) = 0$, was die Behauptung beweist.

Was für die Längen gilt, ist auch für Zeiten richtig. Die Hyperbel kann auch um die τ -Achse gezeichnet werden. Es gilt also folgende

Skalierungsregel: Sowohl die Raum- als auch die Zeitskala werden also mittels entsprechender Hyperbeln der Form $x^2 - \tau^2 = \text{const.}$ von der x -Achse auf die x' -Achse bzw. von der τ -Achse auf die τ' -Achse übertragen.

Zeitdilatation

“Die Anschauungen über Raum und Zeit, die ich Ihnen entwickeln möchte, sind auf experimentell-physikalischem Boden erwachsen. Darin liegt ihre Stärke. Ihre Tendenz ist eine radikale. Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren”

So sagte der große Mathematiker H. Minkowski 1908 auf einer Versammlung Deutscher Naturforscher und brachte damit zum Ausdruck, was wir schon gesehen haben: die starke Ähnlichkeit der Rolle, die Raum und Zeit in der SRT spielen.

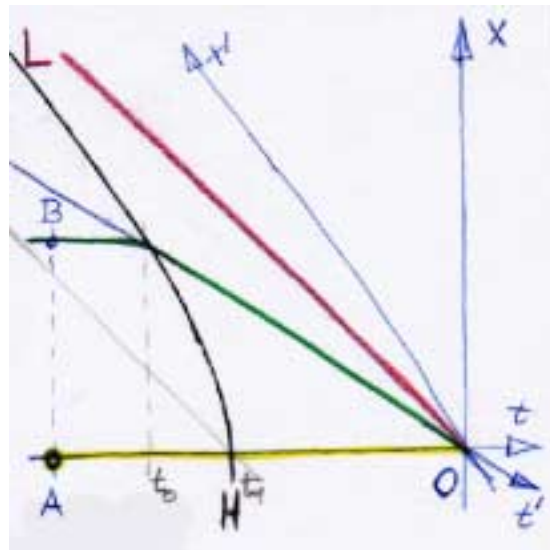


Abbildung 8: Ein Beobachter holt seine Uhr B zu sich heran (grüne Weltlinie). Gelb ist die Weltlinie von Beobachter und Uhr A . Die schwarze mit H bezeichnete Hyperbel schneidet die Weltlinien der Uhren bei gleicher Zeit.

Diese Beobachtung legt nahe, daß es so etwas wie die Längenkontraktion auch für die Zeit geben muß. Das ist in der Tat so. Zeigen tut sich das am schönsten an einem Beispiel, das Einstein schon in seiner Originalarbeit erwähnt:

Ein ruhender Beobachter hat zwei Uhren A und B . Die Uhr A liegt direkt neben ihm, die Uhr B etwas weiter weg (siehe Abb. 8). Die Uhren sollen synchronisiert sein.¹²

Nun holt der Beobachter die entfernte Uhr B zu sich her und stellt sie direkt neben die Uhr A . Er wird feststellen, daß die Uhr eine frühere Zeit anzeigt als die Uhr A . Man könnte auch drastischer formulieren, daß die bewegte Uhr weniger gealtert ist.

Zeitdilatation: Wird ein Gegenstand bewegt, so altert er langsamer als ein ruhender.

Wie bei der Längenkontraktion ist der Effekt symmetrisch. Der ruhende Beobachter B und der ihm gegenüber geradlinig gleichförmig bewegte Beobachter B' haben jeweils eine Uhr. Jeder wird von dem anderen sagen, seine Uhr ginge langsamer.

Bei unserem obigen Beispiel mit der herangeholten Uhr ist das anders. Der Beobachter und die Uhr A befinden sich in einem Inertialsystem, die Uhr B jedoch nicht – sie wird beschleunigt. Dies bricht die Symmetrie der Bezugssysteme und zeichnet die Uhr A vor der anderen aus.

Wir ermitteln den Effekt geometrisch. Zunächst (bis zum Zeitpunkt t_0) sind beide Uhren unbewegt. Dann wird die Uhr B zum Punkt $x = 0$ herangeholt.¹³ Um den Effekt quantitativ zu bestimmen, benötigen wir die Zeitskala auf der τ' -Achse. Wie das geht wissen wir schon – mit einer zur τ -Achse symmetrischen Hyperbel, die sich asymptotisch an den Lichtkegel schmiegt. Die Hyperbel, die das Ereignis schneidet, an dem die Uhr B ihre Geschwindigkeit ändert, haben wir eingezeichnet. Sie schneidet die τ -Achse bei τ_1 .

Das bedeutet nun folgendes: Für die Uhr B vergeht von dem Zeitpunkt τ_0 der Geschwindigkeitsänderung bis zum Eintreffen im Ursprung des Raumzeitdiagrammes die gleiche Zeit wie für die Uhr A vom Zeitpunkt τ_1 bis zum Ursprung. Bei τ_0 waren die Uhren aber noch synchron. Die Zeitspanne zwischen τ_0 und τ_1 wird die Uhr A mehr anzeigen als B , wenn die Uhren sich im Ursprung treffen.

Eine kurze Rechnung zeigt, daß $\tau_0 = \tau_1 / \sqrt{1 - \beta^2}$, das ist die Zeit, um die die Uhr B nachgehen wird. Dabei ist β die Geschwindigkeit, mit der die Uhr B herangeholt wird.

Der relativistische Doppler-Effekt

Den Doppler-Effekt für Schall kennt jeder. Steht man an der Straße und ein Auto fährt an einem vorbei, stellt man folgendes fest. Fährt das Auto auf einen zu, erscheint das erzeugte Geräusch höher, als wenn das Auto von einem wegfährt — und das obwohl sich die Tonhöhe des Geräusches für den Insassen des Autos nicht ändert.

¹²das heißt natürlich nicht, daß der Beobachter von der Uhr B die gleiche Zeit abliest als von der Uhr A . Vielmehr muß die Laufzeit des Lichts von der Uhr B bis zum Beobachter berücksichtigt werden und die Uhr B somit eine minimal frühere Zeit anzeigen. Man erinnere sich an den Begriff der Gleichzeitigkeit, den wir oben mit einer Lichtuhr definiert haben

¹³Der Knick in der Weltlinie von B bei τ_0 ist natürlich idealisiert. In Wirklichkeit muß die Weltlinie abgerundet sein, denn sonst wäre die Beschleunigung von B im Knick unendlich groß. Die Abrundung des Knickes ändert an unseren Folgerungen qualitativ nichts

Für Licht gilt genau dasselbe.¹⁴ Wir wollen uns in diesem Abschnitt überlegen, wie der quantitative Zusammenhang zwischen der ausgesandter und empfangener Frequenz aussieht, wenn Sender und Empfänger sich gegeneinander bewegen.

Wir stellen uns dazu einen Sender vor, der sich mit der Geschwindigkeit v von uns (Empfänger) wegbewegt. Er emittiert Licht der Frequenz ν_0 , der Empfänger misst die Frequenz ν . Die Situation ist in Abb. 9 dargestellt. Der Sender soll im Ereignis A einen Wellenberg und bei Ereignis B den darauffolgenden Wellenberg emittieren. Bei Ereignis A detektieren wir den ersten und bei Ereignis C den zweiten Wellenberg. Uns interessieren nun zwei Dinge: (a) welche Zeit τ' vergeht für den Sender zwischen den Punkten A und B und (b) welche Zeit τ vergeht für uns zwischen den Punkten A und C . Die Frequenzverschiebung ist durch das Verhältnis gegeben: $\nu = (\tau/\tau')\nu_0$.

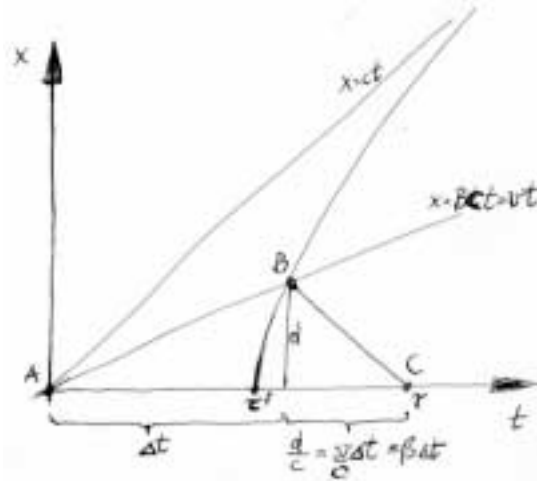


Abbildung 9: Zum Doppler-Effekt. Ein bewegter Sender emittiert bei A und B zwei aufeinanderfolgende Wellenberge. Der Empfänger detektiert diese bei A und C .

Zur Beantwortung der ersten Frage benutzen wir die durch den Punkt B gehende Hyperbel. Wir wissen schon, daß die Uhr des Senders in diesem Punkt dieselbe Zeit anzeigt, wie unsere im Punkt, in dem die Hyperbel die t -Achse schneidet. Der Punkt ist in der Abbildung mit τ bezeichnet. Die durch $(\Delta t, d)$ gehende Hyperbel hat die Darstellung

$$t^2 - x^2 = (\Delta t)^2 - d^2 = (1 - \beta^2)(\Delta t)^2 = (\gamma^{-1} \Delta t)^2 .$$

Die Zeitspanne τ' ist wegen $x = 0$ dann genau durch

$$\tau' = \gamma^{-1} \Delta t$$

¹⁴Zumindest was die Frequenzänderung betrifft. Man behalte jedoch den grundsätzlichen Unterschied im Hinterkopf: Der Schall bewegt sich mit Schallgeschwindigkeit relativ zur ruhenden Luft (es gibt also ein ausgezeichnetes Bezugssystem), wohingegen sich das Licht mit Lichtgeschwindigkeit in jedem Inertialsystem bewegt.

gegeben (da in der Abbildung keine Skala definiert ist, beziehen wir uns auf die Größe Δt). Die Formel drückt nichts anderes als die Zeitdilatation aus.

Die zweite Frage nach τ ist einfacher beantwortet. Aus der Abbildung liest man direkt

$$\tau = (1 + \beta)\Delta t$$

ab. Durch Division erhält man die *relativistische Dopplerbeziehung*

$$\nu = \frac{1 \pm \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \nu_0, \quad \beta = v/c.$$

In dieser Formel gilt das Pluszeichen, falls sich Sender und Empfänger voneinander wegbewegen und das Minuszeichen, falls sie sich aufeinander zubewegen.

Kosmologische Rotverschiebung. Eine wichtige Anwendung des Doppler-Effekts ist die Messung der Geschwindigkeit von Sternen relativ zur Erde. Da Sterne aber kein monochromatisches Licht, sondern Strahlung in einem breiten Frequenzbereich emittieren, braucht man "Markierungen" Spektrum des Sternenlichtes. Genau das stellen aber die Fraunhofer-Linien dar. Der deutsche Optiker und Physiker Joseph von Fraunhofer entdeckte diese schwarzen Linien als sich 1813 das Spektrum des Sonnenlichtes betrachtete. Der Grund dieser Linien liegt darin, daß weisses Licht von der Sonne auf seinem Weg zur Erde durch verschiedene Gase durchtritt. Atome und Moleküle in diesen Gasen streuen bestimmte Lichtfrequenzen aus dem Licht in andere Richtungen. Auf der Erde kommt so gestreutes Licht nicht mehr an.

Licht von fernen Sternen ist nun in der Frequenz verschoben. Die eigentümlichen Fraunhofer-Linien sind im Sternenlicht aber ebenfalls enthalten, nur zu anderen Frequenzen verschoben. Der Grund für diese Verschiebung ist der Doppler-Effekt. Aus der Verschiebung der Fraunhofer-Linien im Sternspektrum folgt also die Relativgeschwindigkeit des Sternes bzgl. der Erde.

Für weit entfernte Galaxien sind die Linien im Lichtspektrum in der Frequenz nach unten verschoben. Man spricht von *Rotverschiebung* (im Vergleich zu *Blauverschiebung*, da rotes Licht eine kleinere Frequenz als blaues hat) des Lichts. Hubble hat 1923 diese Feststellung mit der Entfernung der Galaxien kombiniert und auf diese Weise die Expansion des Universums entdeckt.

Photonen und ihre Energie. Bei der Diskussion des Doppler-Effekts haben wir von monochromatischem Licht der Frequenz ν gesprochen und damit der Wellentheorie des Lichts Tribut gezollt. Einstein hat in einem epochemachenden und ebenso wie die SRT im Jahre 1905 erschienenen Artikel die Existenz von Lichtquanten postuliert. Diese sind später unter dem Namen *Photonen* in das Repertoire der Physik aufgenommen worden. Die dahinterliegende Vorstellung ist die, daß Licht nicht nur als Welle, sondern auch als Teilchen, eben den Photonen, aufgefasst werden kann. Dabei handelt es sich um einen Spezialfall des in der Quantentheorie als *Welle-Teilchen-Dualismus* bezeichneten Konzeptes. Wichtig ist an dieser Stelle, daß ein Photon eine bestimmte Frequenz ν besitzt. In der Physik benutzt man statt der Frequenz viel öfter die Kreisfrequenz ω , die verwirrenderweise oft ebenfalls als Frequenz bezeichnet wird, jedoch schlicht und einfach das 2π -fache der Frequenz ν bezeichnet. Es gilt also $\omega = 2\pi\nu$. Ein Photon ist (u.a.) durch seine Frequenz ω gekennzeichnet. Es besitzt dann die Energie $E = \hbar\omega$ wobei \hbar die Plancksche Konstante bezeichnet.

Die Äquivalenz von Masse und Energie

Die wohl populärste Formel der Physik ist Einsteins $E = mc^2$. Um diese dreht sich der folgende Abschnitt.

Zum Einstieg in das Thema folgen wir dem Weg Einsteins in der Originalveröffentlichung und betrachten folgendes Experiment. Ein Atom befindet sich in einem angeregten Zustand Z_1 und soll beim Übergang in den Grundzustand Z_0 zwei Photonen gleicher Frequenz in genau entgegengesetzte Richtung emittieren. Das Atom bleibt beim Übergang im Ruhesystem also in Ruhe. Es gibt keinen effektiven Rückstoß der Photonen.

Wir diskutieren den Emissionsvorgang nun einmal im Ruhesystem des Atoms und einmal in einem Bezugssystem B , in dem sich das Atom mit der Geschwindigkeit v bewegt und werden feststellen, daß bei der Beschreibung im Bezugssystem B die Photonen dem Atom mehr Energie entziehen als bei der Beschreibung im Ruhesystem des Atoms. Da aber in beiden Fällen die Energieerhaltung gilt, verliert das Atom gemessen im Bezugssystem B beim Übergang mehr Energie als gemessen im Ruhesystem. Die Deutung führt den Unterschied auf eine Änderung der kinetischen Energie des Atoms zurück. Da das Atom seine Geschwindigkeit bei der Emission nicht ändert, muß die Ursache wegen $E_{\text{kin}} = mv^2/2$ in der Änderung der Masse des Atoms liegen.

Wir betrachten zunächst den Vorgang im Ruhesystem des Atoms. Die Energie des Atoms im Zustand Z_i wird durch E_i bezeichnet. Die Frequenz der Photonen ist ω_0 . Insgesamt lautet die Energiebilanz also

$$E_1 - E_0 = 2\hbar\omega_0 .$$

Nun beziehen wir uns auf das Bezugssystem B . Die Energie des sich mit der Geschwindigkeit v Atoms im Zustand Z_i wird durch $E_i(v)$ bezeichnet. Wegen des Dopplereffekts werden die Frequenzen der Photonen unterschiedlich, die Energiebilanz lautet

$$E_1(v) - E_0(v) = \hbar \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \omega_0 + \hbar \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \omega_0 = 2\gamma\hbar\omega_0 .$$

Da für $\beta \neq 0$ der Faktor γ größer als 1 wird, ist die Energie, die die Photonen dem Atom entziehen größer als bei der Beschreibung des Experimentes im Ruhesystem.

Fasst man die Energieänderung des Atoms als Summe aus der Änderung der "internen" Energie $E_1 - E_0$ und der Änderung der kinetischen Energie auf, folgt, daß sich die kinetische Energie um den Betrag

$$(E_1(v) - E_0(v)) - (E_1 - E_0) = 2(\gamma - 1)\hbar\omega_0$$

ändert (gemessen im Bezugssystem B).

Die weitere Argumentation stützt sich nun auf die Formel $E_{\text{kin}} = (1/2)mv^2$ aus der klassischen (nichtrelativistischen) Mechanik, die zumindest für den Fall, daß v sehr klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit ist, gilt. Dabei bezeichnet m die (träge) Masse. Unter Verwendung von $\gamma \approx 1 - (1/2)\beta^2$ und der Feststellung, daß die Änderung kinetische Energie nur durch Änderung der Masse des Atoms verursacht werden kann, folgt

$$\frac{1}{2}\beta^2 \cdot 2\hbar\omega_0 = \frac{1}{2}\Delta m v^2 ,$$

oder, wenn man mit ΔE die Energieänderung des Atoms beim Übergang bezeichnet,

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 .$$

In der Beschreibung im Bezugssystem B hat sich mit der Energieänderung also auch die Masse des Atoms verändert. (Träge) Masse und Energie sind also zwei Namen für ein und dieselbe physikalische Größe.

Man sollte also nicht von der “Umwandlung von Masse in Energie” reden. Bei der Spaltung eines Urankernes in einen Barium- und einen Kryptonkern stellt man fest, daß die Masse des Urankernes größer als die Summe der Massen der entstandenen Kerne ist. Die Differenz ist in der Form anderer Elementarteilchen “entwichen”, oder, nach der obigen Redeweise, “in Energie umgewandelt” worden.

Anhänge

A. Michelson, Morley und der Äther

Zu Maxwells¹⁵ Zeiten ist man davon ausgegangen, daß sich eine Welle nur in einem Medium ausbreiten kann. Das ist z.B. so beim Schall. Dieser breitet sich nur in kompressiblen Medien aus.¹⁶ Die Geschwindigkeit des Schalls ist relativ zum ruhenden Medium zu messen und bei einem isotropen Medium (wie das z.B. die Luft näherungsweise ist) von der Ausbreitungsrichtung unabhängig ist. Einer Schallwelle kann man folgen, und sie sogar überholen. Genau das tut ein Flugzeug, das die "Schallmauer" durchbricht. Bewegt sich ein Beobachter mit halber Schallgeschwindigkeit durch die Luft und sendet eine Schallwelle aus, so misst er die Geschwindigkeit der Schallwelle (in seine Bewegungsrichtung) zur halben Schallgeschwindigkeit.

Das mutmaßliche Medium bei den elektromagnetischen Wellen nannte man Äther. Der Äther mußte seltsame Eigenschaften haben: Körper (wie z.B. die Erde) können sich ohne Widerstand durch den Äther bewegen. In Analogie zum Schall breiten sich elektromagnetische Wellen mit Lichtgeschwindigkeit *relativ zum Äther* aus – so glaubte man zu Maxwells Zeiten.

Nimmt man nun an, daß der Äther existiert, so sollte sich die Erde durch den Äther bewegen. Tut sie das zu einem bestimmten Zeitpunkt nicht, dann sicher ein halbes Jahr später, wenn der Geschwindigkeitsvektor relativ zur Sonne in die Gegenrichtung zeigt. Wir wollen nicht rückfällig in Aristoteles' Zeiten werden, der Äther soll nicht mit der Erde bewegt werden.

Bewegt sich die Erde durch den Äther, sollte die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht in verschiedenen Richtungen auf der Erde unterschiedlich sein (genauso wie beim Beobachter, der sich relativ zur Luft bewegt). Genau das haben Michelson und Morley in einem sehr genauen Experiment überprüft und festgestellt, *daß dem nicht so ist*. Im Gegenteil haben sie gefunden, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht relativ zur Erdoberfläche sehr genau unabhängig von der Bewegungsrichtung und der Lage der Erde relativ zur Sonne ist.

¹⁵James C. Maxwell hat die klassische Elektrodynamik entwickelt, die die elektromagnetischen Erscheinungen durch die Maxwellschen Gleichungen beschreibt. Er hat außerdem erkannt, daß Licht nicht anderes als ein spezieller Typ der von seinen Gleichungen theoretisch vorhergesagten (und von Hertz experimentell entdeckten) elektromagnetischen Wellen ist

¹⁶In der Tat handelt es sich beim Schall um eine Dichte- bzw. Druckschwankung im kompressiblen Medium